

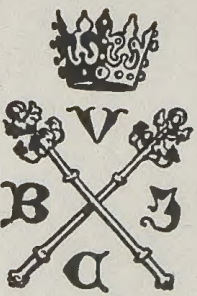
double,

Sept 129

02

Datum Republicam: ideo statim Dux Jeremias Wisniowiecius unā
 cum Januſio Tyſzkiewicz Palatino Kijoviae graſſatium Coſacorum tur-
 mas diſſipare, ac interea præciſā omni morā unicuiq; nocivā, quilibet
 Palatinus & Terra militem conſcribere cepit, ut quancrocyus ultra
 Leopoliſm ad condicūm apud Oppidum *Gliniany* locum tranſiret, ac in-
 de quò neceſſitas
 Es 109. Indictum
 bienski, Varſaviae
 Anno ſuprafato 16
 Terrarum pro die
 Conſiderationes.

CONFÆDE



910205 I
 Mag. St. Dr.

particulari Proſſov
 pta, in qua more antiquo reſumptæ Conſiderationes. aliās *Kapituly*,
 ruitio Republicæ ſub fide, honore & alijs ſponſionibus ibidem expreſſis,
 tum electio & acceptatio illius tantūm Regis, qui de communi con-
 ſenſu omnium ordinum Regni & M.D. Lithuania fuerit electus, appro-
 miſſa: contra invalores Civitatum, Arcium, Bonorum Republicæ, Spi-
 ritualium & Secularium perſonarum, tum contra violatores quarum

JEOMETRYA

DLA

SZKÓŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ II.

Drugi raz wydana.

Bez oprawy Zł: 1. gr. 25.



W KRAKOWIE 1785. Roku

w Drukarni Szkoły Głównej Koronnej.

Dzielo: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuillier
Obywatela Genewskiego, w Towarzystwo Nauk
w témże Mieście ustanowione policzonego, które za
ogłoszonem w Polsce, i obcych krajach Uczonych
do pisania wezwaniem, z pomiędzy innych, po-
twierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzystwa
do Xiąg Elementarnych roztrząszone, a przez J. X.
Gawrońskiego Kanonika Koadjutora Krakowskiego, Le-
ktora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiadają-
cego, na Polski język z Francuzkiego przełożone,
Szkołom Narodowym do użycia, podług przepisów
naszych, podaliśmy. w Warszawie dnia 30. Pa-
ździernika Roku 1780.

IGNACY Xzę MASSALSKI Biskup Wilénski, Pre-
zydujący.

MICHĄŁ Xzę PONIATOWSKI Biskup Płocki.

AUGUST Xzę SUŁKOWSKI Wda Kaliski.

JĘDRZĘY MOKRONOSKI Wda Mazowiecki.

JACEK MAŁACHOWSKI Podkan. Koron,

JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W. X. Lit.

MICHĄŁ MNISZECH Marszałek Nadwor. W. X. L.

IGNACY POTOCKI Pisarz W. W. X. Lit.

ADĄM Xzę CZARTORYSKI Jen. Ziém Pod.

STANISŁĄW Xzę PONIATOWSKI Jen. Lieut. W. K.

FRANCISZEK BIELIŃSKI Star. Czérski.

ANDRZĘY ZAMOYSKI Kawal. Ord. Orła Białego.



910205

I/2

—————W—————

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH
W ROZDZIAŁACH TEJ CZĘŚCI JEOME-
TRYI.

WSTĘP - - - - - Karta 1.

ROZDZIAŁ I. O położeniu tak Linii,
jak i Płaszczyzn iednych, względem dru. 11.

ROZDZIAŁ II. O Kątach brytowych. 34.

Przygotowanie do Rozdziałów następu-
jących. O podniesieniu liczby, do iey Sze-
ściannu, albo Kubusa, i o wyciągnięciu
Pierwiastku Sześciennego, albo kubicznego. 52.

ROZDZIAŁ III. O Równoległoscianach
prostokątnych - - - - - 72.

ROZDZIAŁ IV. O Równoległoscianach
nie prostokątnych. - - - - - 94.

ROZDZIAŁ V. O Graniastostupach. 109.

ROZDZIAŁ VI. O Piramidach, albo
Ostrostupach lub Ostrograniach. - - - 117.

ROZDZIAŁ VII. O Walcach - - - 144.

ROZDZIAŁ VIII. O Ostrokrągach - 154.

ROZDZIAŁ IX. O Kuli. - - - 172.

ROZDZIAŁ X. O Brytach podobnych 192.

ZBIÓR

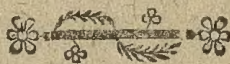
ZBIÓR SŁÓW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, uży-
tych w téy Części Jeometrii, z przydané-
mi obok słowami łacińskiemi, toż samo
w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegón.	<i>Polus.</i>
Bryła.	<i>Solidum.</i>
Bryłowość.	<i>Soliditas.</i>
Bytność.	<i>Existentia.</i>
Ciągło.	<i>Continue.</i>
Ciągły.	<i>Continuus.</i>
Czworokątny.	<i>Quadrangularis.</i>
Czworościan.	<i>Tetraëdram.</i>
Dwódzielný.	<i>Subduplicatus.</i>
Dwómnożny.	<i>Duplicatus.</i>
Dwómnożyć.	<i>Duplicare.</i>
Dwódziesięścian.	<i>Icosædram.</i>
Dwónastościan.	<i>Dodecaëdram.</i>
Graniałtoślup.	<i>Prisma.</i>
Jednoimienny.	<i>Ejusdem nominis.</i>
Kąt płaski.	<i>Angulus planus.</i>
Kąt bryłowy.	<i>Angulus solidus.</i>
Kłoc.	<i>Truncus.</i>
Krawędź.	<i>Arrête (po Francuzku.)</i>
Krzywy.	<i>Curvus.</i>
Kula.	<i>Sphaera.</i>
Kulisty.	<i>Sphaericus.</i>
Nadmiar.	<i>Excessus.</i>
Odpowiadający.	<i>Correspondens.</i>
Ośmiościan.	<i>Octædram.</i>
Ostrosłup albo Ostro- grán.	<i>Pyramis.</i>
	Ostro-

Ostrokrag.
 Ośrokrag ścięty.
 Płaszczyzna.
 Początkowy.
 Półkolé.
 Półkula.
 Połączenie.
 Przecięcie.
 Rodzenie się.
 Równik.
 Równoległoboczny.
 Równoległościán.
 Rozległość.
 Sciana.
 Spodek.
 Stały.
 Szescián.
 Trójkątny.
 Tróymnożny.
 Walec.
 Warsta.
 Wielościán.
 Wyczerpanie.
 Wymiár.
 Wyrocznia.

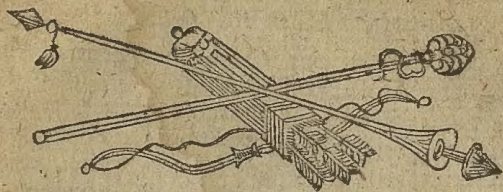
Conus.
Conus truncatus.
Planum.
Elementaris.
Semicirculus.
Hemispherium.
Combinatio.
Sectio.
Generatio
Aequator.
Parallelogrammicus.
Parallelogrammum.
Extensio.
Paries.
Pes.
Constans.
Hexaedrum albo Cubus
Triangularis.
Triplicatus.
Cylinder.
Stratum.
Polyedrum.
Exhaustio.
Dimensio.
Oraculum.



JEOME.



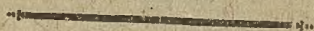
J
C
dzie
ani sa
wsze
swoig



JEOMETRYI

CZĘŚĆ DRUGĄ

O Bryłach.



W S T E P.



Części pierwszej samemi tylko zatrudnialiśmy się liniami i powierzchniami; lubo iakążkolwiek rozległość (extensio) będzie rzeczy iakięy, nie jest ona ani samą linią, ani samą powierzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i w głąb. I tak, pokóy naprzykład, ma swoją długość, ma szerokość, i wysokość, czy-
li

A

li

li grubość. Tarcica, choćby nąycieńsza, ma także długość, szerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, téy tarcicy, toiest: nie byłoby rozległości iéy, uważanéy co do długości tylko, i szerokości, gdyby nie było tarcicy uważanéy co do wszystkich iéy wymiarów. Powierzchnią ogranicza rozległość, i onę kończy: aby zaś granica iakiéy rozległości była w saméy rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak, iak (mówiąc przez podobieństwo, lubo dalekie,) nie byłoby koloru na przykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobem, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiéy rozległości, (cośmy nazywali linią); nie masz iednak téy długości, jeżeli nie masz powierzchni, którą, ona kończy, lub na której może bydź w rzeczy saméy ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni: a że nie będzie powierzchni, jeżeli nie będzie rozległości mającéy trzy wymiary; więc linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mówi się, iż się bawi około *Ciała* (corpus), albo *Bryły* (Solidum.)

Jeometrya nie uważa inaczéy *Ciała*, tylko ile to rozciągnione iest wzdłuż, w szerz, i wwyż albo w głąb: inszemi zaś własnościami iego wcale się nie zatrudnia, zostawiając

ie do uważania Fizykóm. Lubo zaś zdaie się, iż sobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Jeometrowie; mają jednak obszerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych, których wiadomość po większą częśći koniecznie jest potrzebna chcącemu w Fizyce postąpić.

Nie sami tylko Jeometrowie, uważając ciała, iedną sobie w nich własność, toiest rozległość za cel wystawiają. Jest to, a przynajmniej bydz powinien, powszechny postępowania sposób, że gdy kto rzecz jaką z gruntu chce poznać, i poiać; po części naprzód iey własności uważa, a dopiero łączy ię razem, i dokładniejszy o rzeczy całej nabywá wiadomości. Rozum ludzki nadto iest ograniczony, aby wiele pospołem nieznaných ieszcze własności mógł dochodzić, a tém bardziey ię ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z osobna dochodzenia, tym większy iest wági; im więcey rzeczóm taż własność służyć będzie: a taką własnością iest rozległość. Cokolwiek pod zmysły nasze podpada i podpadać może, wszystko to iest rozległym: cokolwiek więc odkryie tym sposobem Jeometra, może to do wszystkich rzeczy przystósować; które tylko pod zmysły nasze podpadaia, lub im poddane bydz mogą. A stąd się okazuię własność w wynalázkach Jeometrycznych, i obfitość w przystósowaniu onychże.

Lubo, mając wzgląd na słabość pojęcia ludzkiego, jedną tylko własność ciała uważa Geometra; dla większej jednak wygody i tę jeszcze dzieli niciako na części, i w myśli je osobno stawia, chociaż w rzeczy samej osobno się nie znajdują. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym miejscu, gdzie rolę swoją uprawia. Dosyć mu na tym, że ta grubość jest dostateczną do przyjęcia ziarna, do dostarczania soku i do rozwinięcia się tegoż ziarna. Wielkość pola znać osobliwiej stara się, aby wiedział, ile na nim ziarna posiać może, a zatem powierzchnią swego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piszący, miarkuje wielkość powierzchni papieru, końcem zmieszczenia na nim tego, co ma pisać: nie wchodząc w jego grubość i dosyć mając na tym, że mu atrament nie przebiega.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego; wszelako jednak, ciało to, dwie strony odmienné, przeciwne sobie mieć musi, i jedna z nich odłączyć się w rzeczy samej może od drugiej, luboby nie znalazło się osobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż najcięższe, nie może być za jedno brane, co powierzchnią; a zatem nie prawdziwie rzecz wykładają niektórzy Geometrowie, gdy mówią: że ciało, albo bryła składa się z powierzchni położonych jednych na drugich; bo iakążkolwiek byłaby liczba tych warstw, z których ciało złożone uważamy, każda jednak w szczególności ta warstwa byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miała by dwie strony przeciwne, i mogąc się od siebie odłączyć.

Co

Co się zaś powiedziało o powierzchniach; to i o liniach twierdzić należy, że nie dla tego są od Jeometrów uważane, iakoby w rzeczy samej znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak szeroka jest droga, którą ma przebydź, dosyć mu na tém, iż się nią udać może. Liezba kroków, które ma czynić, nie zawisła od szerokości, ale od samej długości téj drogi; tę przeto długość szczególniej uważa.

Niechby była bardzo mała szerokość powierzchni iakiej, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szerokość podzieloną była na iak náywięcej części, przez liniie równoodległe od długości: wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak náy mnieyszą była odległość dwóch liniy, które tę szczupłą powierzchnią kończą: za iedną iednak linią wziąć ich nie można; a stąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie jest niedokładne a bardziey ieszcze fałszywe; że powierzchnia składa się z liniy położonych iednych przy drugich.

Na koniec zdarzają się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciagu całej linii, ale koniec iey tylko, ieden lub obadwá, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Jeometra samym się zatrudnia *punktem*. Punktu w samej istocie nie masz, ieżeli nie masz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel swojej drogi, iak punkt iaki sobie wystawia, wielkością iego wcale się nie zaprzatając, aż poki do niego
nie

nie dojdzie: doszedłszy, uważa dopiero obszerność miejsca, do którego dążył. Nie masz wierzchołka kąta, jeżeli nie będzie dwóch linii ten kąt czyniących. Uwagi nad którymi się zastanawia Jeometra czyli to, co do położenia punktów iednych względem drugich, czyli względem linii iakiéy, pochodzą z samego wystawienia sobie w myśli tych rzeczy w istocie się nie znajdujących, dla łatwiejszego doysścia tego, czego szuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmysłów naszych, lub względem wielkości ciał, które nam náyczęściéy pod zmysły podpadaia; wszelako można oddalić myślą tę małość względem innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też náy mniejsze, iak gdyby wielkiém bardzo było, a to względem tysiącznéy na przykład części swoiéy.

Niech będzie iak náy mniejszą linią: téy linii koniec ieden, zawsze różnić się będzie od drugiego. I znowu niechby kto na iak náy więcéy części podzielił iaką linią każda z tych części dwa końce odmiénne mieć będzie, a stąd poznać można, iak nie prawdziwe jest to wyrażenie, że linią składa się z punktów przy sobie położonych.

Wystawiając sobie Jeometra pod temi różnemi postaciami rozległość, uprzedzać tém samem zdanie się té trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwéy bytności (existentia) tych rzeczy, które są celém iego nauki.

Powierzchnia płaska, jest powierzchnią, na której ku wszystkim stronom linie proste prowadzić można: i takimi to liniami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wszystkie części na téż samę *Płaszczyznę* zostają (in eodem Plano). W części następującej takie nadto linie i powierzchnie zabawić nas będą, które się na odmiennych płaszczyznach znajdują.

Z dwoiakiemi liniami mieliśmy jeszcze do czynienia: z prostemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się, były albo zakończone liniami prostemi, albo linią kołową, albo liniami prostemi, i częściami linii kołowych. W części następującej będziemy nadto zabawić się różnemi powierzchniami *krzywemi* (*curva*), które wystawić sobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płaskich, które jużśmy roztrząsali. Obaczmy to w szczególności, gdy o każdej takiej powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Brył*; te dwoiakięgo gatunku zabawić nas będą; jedné, które są zakończone powierzchniami płaskiemi; drugie, które się kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płaskiemi.

Jeometryą więc, jest to nauka, która się zabawia samą rozległością.

Linie proste dwoiakośmy uważali: raz co do ich wielkości; drugi raz co do ich położenia

nią iednych względem drugich. W pierwszym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spólną im miarę, do której stósowaliśmy każdą z osobna linią. W drugim względzie, albo linie z sobą się spotykały, i stąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Co do powierzchni, przytoczyliśmy naprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia linii iednych względem drugich, toiest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i iednakowego położenia. Jednym z náyznamienitszych przytósowań było przeniesienie, czyli przerysowanie iakieykolwiek figury prostokreślnéy. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokreślnych nie zawisła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Tróykaty, lub Równoległoboki, byleby iednakowé miały podstawy (i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa na przykład Tróykaty, iako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stósunku odwrotnym ich wysokości: nad to równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby: ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i Kwadrat może bydź tak zrobiony, że się równać będzie iakieykolwiek figurze danej prostokreślnéy; może ieszcze zrównany bydź z summą lub różnicą figur inszych prostokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką prostokreślną, i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od iedney lub więcej figur prostokreślnych: dokładnie zaś można mieć koło równe inszemu danemu, lub wielu inszym kołom także danym.

Lubo wielkość figury nie iest tém samém wyznaczoną, że wyznaczony iest iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy sposób ieden z naywygodniejszych, wykreślenia figury prostokreślney o ilukolwiek bokach danych; mając dany iey obwód, widzieliśmy orąż granice, w których przy nie powiększonym obwodzie, powierzchnia figury bydz może powiększoną, lubo zmniejszenia iey nie má żadnych granic.

Z podobieństwa położenia linii, które kończą figurę, i z proporcjonalności tychże linii wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przytósowań. Szczególniey zaś wynikało, przeniesienie na papier, działań na ziemi częstokroć nierówney odprawionych; które to przeniesienie dokładnieyszem i łatwieyszem ieszcze stawało się, używszy rachunku.

W tém wszystkiem, co się dotąd mówiło, nie wspomniano się tylko o linii prostey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaskich zakończonych przez linie proste, albo przez linie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskiemi, albo krzywemi, mającemi swój początek od powierzchni płaskich. Ta część Jeometryi, nazywá się

Geome-

10. *GEOMETRYI C. II. O BRYŁACH.*

Geometrią początkową, (*Geometria Elementaris*): służy ona za fundament koniecznie potrzebny do inszych części zawilszych, z których się składa *geometrią wyższą* (*Geometria sublimis*), a w tę rzecz iest o rozmaitych inszych liniach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych, i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich linii krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też *Jeometryą początkową* od wyższyć, i co do sposobu rysowania figur do nię należących: w *Jeometryi* albowiem początkowey, dosyć iest na cyrkle i linii do wykreślenia figur ię własnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może bydź rozwiązane, do nię należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc bydź rozwiązany, z pomocą samęj linii i cyrkla, to iest przez samę linię i łuki koła, rozwiązuje się z użyciem inszych ieszcze narzędziów, albo linii krzywych, odmiennych od koła; o takowem rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.



ROZDZIAŁ I.

*O położeniu tak Linii iako i
Płaszczyzn iednych względem
drugich.*

1. **Twierdź:** 1. Gdy linią má dwa swoje punkta, na iednej płaszczyźnie, má ié oraz i wszystkie na téjże płaszczyźnie.

Dowód: Linią prostą wyznacza się przez dwa punkta, a zatem linią prostą poprowadzoną przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyźnie zniydzie się z każdą inną prostą, przez téż dwa punkta poprowadzoną, i iedną z nią linią uczyni.

2. **Twierdź:** Przez linią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedną płaszczyzna.

Dowód: Wystawmy sobie myślą, iż przez tę linią przechodzi iakákolwiek płaszczyzna: niecháy ta płaszczyzna obracać się około téjże linii: w tym obrocie przejdzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą samą płaszczyzną, której szukamy.

Można

Można także i przez dwie linie przecinające się (a) przeprowadzić płaszczyznę: ponieważ płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych linii i przez którykolwiek punkt drugiej, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch linii, i przez punkt należący do drugiej linii: a zatem i drugą tą linią całą jest na téż płaszczyźnie.

Można nakoniec i przez trzy boki Trójkąta przeprowadzić płaszczyznę. Jakoż płaszczyzna przechodząca przez dwa boki Trójkąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecina tamte dwa, a zatem i ten trzeci bok na téż płaszczyźnie.

3. *Twierdź: 3.* Gdy się dwie płaszczyzny przecinają, tém spólném ich przecięciem, jest linią prostą.

Dowodz. Weźmy na tém spólném przecięciu dwa jakiegokolwiek punkta, i popro-

(a) Mówię: *przecinające się*, bo wiele jest linii, których położenie jest takie, że przez nie nie może razem przechodzić jedna płaszczyzna: na przykład w kostce od grani, tak jest położone ramię jedno kąta, na jednéj stronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta na innéj stronie, że przez té dwie linie jedna płaszczyzna przechodzić nie może.

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 13.

poprowadźmy przez nie, na iednę z dwóch płaszczyźnie, linią prostą: ta linia będzie miała na drugiej płaszczyźnie dwa punkta do siebie należące: więc i cała będzie na téżę drugiej płaszczyźnie: a zatem będzie cała na obydwóch płaszczyznach, toiest będzie spólnym ich przecięciem.

To, co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tém, co się linii tycze; toiest, linia prosta wyznacza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie linie przecinające się. Gdy znowu dwie linie wzajem się przecinają, punkt spólnym ich iest przecięciem: gdy zaś przecinają się dwie płaszczyzny, spólnym ich przecięciem iest linia prosta.

4. *Twierdzo 4.* Gdy linia prosta do dwóch inszych, które się przecinają na iednej płaszczyźnie, prostopadła iest w punkcie ich przecięcia; będzie téż prostopadła i do każdéy inszéy linii, przechodzącéy przez ten punkt na téżę płaszczyźnie.

Można naprzód objaśnić na karcie przełamanej. Linia prosta, podług której karta się przełamała, prostopadła iest do boków części dwóch, téy karty przełamanej. Obracając część iedną złamaną, około złamania czyli spólnego prze-

przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego linią przecięcia była prostopadła, odmiéniać będzie położénie; wszelako iednak, na iednéy zostanie płaszczyźnie, i linią przecięcia zawsze do niego będzie prostopadła. Tén przyktąd prawdę tę zmysłóm dosyć ukazuje, nie dosyć iednak ukazuje ją rozumowi.

Táb. I. Dowodz. Niech będą dwie linie pro-
Fig. 1. ste, AB , CD , przecinające się w P , i niech do obudwóch prostopadłą będzie linią SP . Na płaszczyźnie przechodzącej przez tę dwie linie, przeciągnąwszy przez punkt P iakąkolwiek linią EF , do téy linii będzie też prostopadłą linią SP .

Weźmy linie równe: PA , PB , i znowu PC , PD , także równe. Poprowadźmy AC , BD spotykające linią EF , w punktach E , i F .

Ponieważ Trójkąty: APC , BPD , mają dwa boki równe iedné względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe: więc mogą przystać do siebie: a w szczególności kąt PAC , równy jest kątowi PBD . Przeto i Trójkąty APE , BPF iako mające równe boki: PA , PB , i kąty równe iedné względem drugich, mogą też do siebie przystać, a w szczególności, równe są w nich boki PE , PF , i AE , BF .

Po-

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 15

Pociągniemy jeszcze linie SA, SB, SC, SD: Trójkąty prostokątne SPA, SPB, mają bok spólny SP, i boki PA, PB, równe: a zatem mogą do siebie przystać: a w szczególności linie SA, SB, są równe. Podobnie równe są i linie SC, SD. Dwa więc Trójkąty CSA, BSD, których boki wszystkie równe są iedne względem drugich, mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Trójkąty: SAE, SBF mają boki SA, AE, równe względem boków SB, BF, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać: a w szczególności równe są linie, SE, SF.

Więc w Trójkątach SPE, SPF, równe są boki w jednym, względem boków drugiego a zatem i te przystać mogą do siebie: a w szczególności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym, a zatem linia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twierdzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być objaśnionem przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w jnszy sposób. Toż rozumieć trzeba i
względem

względem wszystkich prawie podán, w téy części zawartych.

5. *Defin.* Gdy linią prostopadłą jest do wszystkich inszych, które się w punkcie iéy spádku przecinaia na płaszczyźnie iakiey; ó takiey lini mówić się, że jest prostopadłą do téy płaszczyzny; a zatem ieżeli linią prostopadłą jest do dwóch inszych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyźnie, ta linią prostopadłą jest i do téy płaszczyzny.

6. *Twierdz.* 5. *Wzajemnie*, ieżeli linią, prostopadłą jest do trzech inszych linii, które się w jednym iéy punkcie przecinaia; płaszczyzna ta, którą przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi téż i przez trzecią!

Táb. I. Niech będzie linią SP. prostopadłą do
Fig. 2. linii PB, PD, PF, które przechodzą przez téże sám punkt P, linii SP.

Niecháy płaszczyzna iaká przechodzi przez linią SP, i PF. Jakąkolwiek będzie linią, w której ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez linie PB, i PD; wszelako linią SP będzie prostopadłą do tego spólnego przecięcia: a zatem gdyby linią PF, nie była tém spólnem przecięciem, tedy linią SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na téyże co i ona

milibus, universus paré quatuor millium Equitum & Colacorum Vlatas.

O położeniu tak Linii iako i Płaszczy: 17

ona płaszczyźnie, to jest: byłaby prostopadła do linii PF, i do drugiej jeszcze linii różney od PF przecinałbyćy spólnie dwie płaszczyzny: co byż nie może. Linia więc PF. nie jest różną od spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatem jest tém spólném przecięciem; i przeto należy i do drugiej płaszczyzny BPD: to jest, ta płaszczyzna BPD przechodząca przez linię PB, PD, przechodzi też i przez linią PF.

7. *Twierdź: 6.* Dwie linie prostopadłe do iedney płaszczyzny, są od siebie równoodległe.

Niech będą dwie linie BA, CD prostopadłe do iedney płaszczyzny, na którą spadaia w punktach B, i C, te dwie linie są równoodległe.

Tab. I.
Fig. 2.

Poprowadźmy linią BC, a od końca C spólnego linii BC, z linią DC, prostopadłą do płaszczyzny, wyciągniemy na téj płaszczyźnie prostopadłą CE, do BC, równą iakiękolwiek długości BA, wziętęj na drugiej linii prostopadłej do téjże płaszczyzny. Poprowadźmy jeszcze i linię BE, AE. Dwa Trójkąty ABC, ECB, mają spólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykreślenia, i kąty proste: ABC, BCE; więc te Trójkąty mogą przystać do siebie, a w szcze-

B gól.

gólności linie BE , AC , są równe. Dwa tedy Trójkąty ABE , ECA mają względem siebie równe wszystkie boki, a zatem przystać mogą do siebie: a w szczególności równe są kąty ABE , ACE . Że zaś linią AB , prostopadłą jest do linii BE , (ponieważ wzięliśmy ją za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez linię BC , BE); więc kąt ACE , jest też prosty: a zatem linią EC prostopadłą do dwóch linii CB , CD , z wykreślenia, jest też prostopadłą i do linii CA . Przeto ta linią CA jest na tej samej płaszczyźnie, co i linii BC , CD . A że płaszczyzna przechodząca przez linię AC , CB , przechodzi też i przez linią AB ; więc linii AB , CD , są na jednej płaszczyźnie: będąc zaś na jednej płaszczyźnie, że są prostopadłymi do linii BC ; więc od siebie równoodległymi będą.

Przestroga. Aby łatwiej zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2; w linii BC , tak, aby część jedna $ABCD$ tej Figury, przypadała prosto nad drugą częścią BEC . Podobnie dopomagać można łatwiejszemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie jedna zachodzi płaszczyzna.

Uwaga. W pierwszej części cokolwiek się mówiło o liniach równoodległych; zawsze to było w tym rozumieniu, że te linie kreślone były, na tej

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 19

samęj płaszczyźnie, na której i każda insza linia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8. *Twierdź:* 7. Jeżeli dwie linie są od siebie równoodległemi, a jedna z nich prostopadła jest do iakięj płaszczyzny; będzie i druga do téjże płaszczyzny prostopadła.

Weźmy dwie linie BA, CD za równoodległe: jeżeli jedna z nich n.p. CD, jest prostopadła do iakięj płaszczyzny; będzie i druga do téjże płaszczyzny prostopadła i druga BA.

Tab. - I.
Fig. 2.

Na płaszczyźnie, do której wzięliśmy za prostopadłą CD, pociągniemy CB: będą do CB, prostopadłemi obie dwie linie AB, i CD. Na téjże płaszczyźnie niech będzie CE prostopadła do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy jeszcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tém zawisło, aby okazać, że kąt ABE jest prostym, to jest, że linia AB prostopadła do linii BC, jest razem prostopadła i do linii BE, leżący na téj samęj płaszczyźnie, do której linia CD jest prostopadła.

Dwa Trójkąty prostokątne ABC, ECB, mają ramiona kąta prostego równe iedne względem drugich: a zatem: té dwa Trójkąty mogą przystać do siebie,
Bz a w szcze-

a w szczególności linie AC, BE, są równe. Maia tedy dwa Trójkąty ABE, ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatem przystać do siebie: a w szczególności równe są kąty ABE, ACE. Płaszczyzna przechodząca przez dwie linie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez linią BC, iako i przez AC; więc linie DC, BC, AC, na iednę płaszczyźnie leżą. A że linia CE iest prostopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też prostopadłą i do trzeciej linii CA, a zatem kąt ACE iest prostym; a że ten kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, iest prostym.

9. Zagadn. Spuścić prostopadłą do płaszczyzny, z punktu nie na niej danego.

Tab. I. Niech będzie taki punkt S, z którego Fig. 3. spuścić trzeba prostopadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyźnie daney nakreślimy iakąkolwiek linią AB. Niech przez tę linią i przez punkt dany S, przechodzi insza płaszczyzna, na której pociągniemy SD, prostopadłą do AB. Na daney płaszczyźnie niech też będzie poprowadzoną DP, prostopadłą do AB; a przez linie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na której niech będzie SP pro-

O położeniu tak Linii iako i Płaszczy: 21

prostopadłą do linii DP: ta linia SP będzie razem prostopadłą, której szukaliśmy.

Wykreślenie służące do dowodzenia.
Niech przez P, przechodzi linia EF, równoodległa od AB.

Dowódz: Linie SD, PD, z wykreślenia są prostopadłe do linii AB; więc linia DB, wzajemnie jest do obydwóch tych linii prostopadłą; a zatem prostopadłą jest i do płaszczyzny przechodzącej, przez te dwie linie. A że linia EF równoodległa jest od linii AB; więc linia EF jest też prostopadłą do téż płaszczyzny SDP: a w szczególności prostopadłą jest do linii SP, i linia SP, jest wzajemnie do linii EF prostopadłą. Że zaś linia SP zrobona była prostopadłą do linii PD; więc linia SP jest razem prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy tej spádki P, przecinaia na danej płaszczyźnie: a zatem linia SP, prostopadłą jest do téż płaszczyzny.

10. *Zagadn: 2.* Od punktu danego na płaszczyźnie wynieść prostopadłą do téż płaszczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaszczyzny danej z punktu jakiegokolwiek nie na nię, będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od téż prostopadłej. 11.

11. *Uwaga 1.* Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można prostopadłą, do płaszczyzny.

12. *Uwaga 2.* Gdy linią iaką nie jest ani na samey płaszczyźnie, ani do nięj prostopadłą; może bydź albo od nięj równoodległą, albo tak, iak zechcemy do nięj nachyloną.

Naprzód. Jeżeli, spuściwszy z dwóch punktów linii iakięj, dwie prostopadłe na płaszczyznę, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta linia od której są spuszczone, będzie równoodległą od płaszczyzny, na którą ie spuściliśmy, to jest: nie spotka nigdzie tęj płaszczyzny, choćby tak linią, iako i płaszczyzna nąydalej były przedłużone.

Tab. I. *Powtóre.* Niech będzie linia SD
Fig. 3. nie prostopadłą do płaszczyzny, ale niech spotyka płaszczyznę w punkcie na przykład D. Z punktu któregokolwiek tęj linii n. p. z S, spuścmy do tęj płaszczyzny prostopadłą natrafiającą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa się kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tęj linii SD, do płaszczyzny.

Ten kąt jest nąymniejszym z tych wszystkich, które czynić może linia SD, z jakiegokolwiek inszą linią poprowadzoną

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 23

dzoną na téj płaszczyźnie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równym linii PD, nakreślony był okrąg koła, wszystkieby linie ciągnięte od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniły iednakowy zawsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do innych główniejszych pomocniczych (subsidiariz) i łatwe do dowiedzenia, przestaje się tu na samém ich wyrażeniu.

17. *Twierdz:* 8. Gdy dwie linie równoodległe są od trzeciej, która na odmiennéj od nich leży płaszczyźnie; te dwie linie i od siebie równoodległe będą.

Niech będą dwie linie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie linie od siebie równoodległemi. Od punktu któregokolwiek na linii EF, n. p. G, wyciągniemy dwie do téj linii prostopadłe: GH GI, na płaszczyznach przechodzących przez tę linię EF, i przez AB, i CD. Ponieważ linia EF, jest prostopadłą, tak do linii GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez te dwie linie. A że znowu dwie linie AB, CB są równoodległe od linii EF; więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącej przez linię GH, GI, a zatem są od siebie równoodległe. 14.

Táb I.
Fig. 4.

14. *Twierdź: 9.* Gdy dwie linie, które się schodzą, są równoodległe względem dwóch drugich, które się także schodzą; kąt zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugimi.

Táb. I.
Fig. 5.

Niech będą dwie linie AB , AC , równoodległe względem dwóch drugich DE , DF ; kąt BAC zawarty między dwiema pierwszemi, równy jest kątowi EDF zawartemu między dwiema drugimi.

Weźmy równe linie AB , DE , i równe także linie AC , DF . Pociągniemy linie AD , BE , CF , BC , EF .

Ponieważ linie AB , ED , są równe, i równoodległe, czworokąt $ABED$ będzie oraz Równoległobokiem, i linie też AD , BE , będą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe są i równoodległe linie AD , CF ; więc linie BE , CF są też równe, i równoodległe względem linii AD : a zatem równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt $BEFC$, oraz Równoległobokiem, a w szczególności równe są linie BC , EF . Przeto Trójkąty BAC , EDF , boki trzy równe mają, i edne względem drugich, a zatem przystać mogą do siebie, a w szczególności równe są kąty BAC , EDF .

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 25

15. *Przystosowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaia. Na każdej z tych płaszczyzn wystawmy prostopadłą, do spólnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi prostopadłemi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraż inszy na spólném przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

Defin: Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzienia pochyłości tych dwóch płaszczyzn iednej względem drugiej. Gdy zatem kąt zawarty między temi dwiema prostopadłemi, jest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna jest prostopadłą do drugiej.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema prostopadłemi zawarty, miał: 10° , 20° , 30° i t. d. w tym razie i dwie płaszczyzny zawierałyby kąty: 10° , 20° , 30° , i t. d.

Można ieszcze i w inszy sposób przeświadczyć się, iako pochyłość dwóch prostopadłych, wyciągniętych na dwóch płaszczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spólnego tych płaszczyzn, odpowiada, zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyzn. Wystawmy albowiem sobie te dwie płaszczyzny przystaiące do siebie, i leżące iedną na drugiej. Niech potem spodnią płaszczyzna zo-
sta-

stanie na swoim miejscu, a wyższą niech się podnosi, i obraca około wspólnego przecięcia. Wspólne przecięcie, pod czas tego obrotu będzie zawsze prostopadłe, do dwóch linii prostopadłych wyciągniętych na obu płaszczyznach, od jednego punktu; a zatem te dwie prostopadłe zostające zawsze każda na swojej płaszczyźnie, odpowiadać będą pod czas tego obrotu, pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy n. p. płaszczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeysdz trzeba, aby się znalazła na drugiej stronie, w równi z płaszczyzną ruchomą: w ten czas i prostopadła, do wspólnego przecięcia, znaydując się na płaszczyźnie ruchomey obieży połowę tej drogi, którą ma obeysdz aby się w jednej równi stykała końcem swoim z drugą linią prostopadłą, do wspólnego przecięcia wyciągniętą na płaszczyźnie nieruchomey. Toż mówić i o inszych częściach tego obrotu.

16. *Twierdź:* 10. Gdy iaką prostą linią prostopadłą jest do płaszczyzny; do téż płaszczyzny prostopadłą będzie każda insza płaszczyzna przez tę linią przechodzącą.

Tab. I.
Fig. 6.

Niech będzie linią GP, prostopadłą do iakiey płaszczyzny, i niech przez tę linią GP, przechodzi insza iakakolwiek płaszczyzna.

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 27

płaszczyzna; ta prostopadłą będzie do pierwszej płaszczyzny.

Niech linią AB, będzie wspólnym tych dwóch płaszczyzn przecięciem; od punktu P, na pierwszej płaszczyźnie wyciągniemy PC, prostopadłą do tego wspólnego przecięcia.

Ponieważ linią GP, wzięliśmy za prostopadłą do pierwszej płaszczyzny; więc GP prostopadłą będzie tak do linii AB, iako i do linii PC; bo te dwie linie przechodzą przez pierwszą płaszczyznę: a zatem od punktu któregokolwiek n. p. P, znajdującego się na wspólnym przecięciu dwóch tych płaszczyzn, wyciągnąwszy, prostopadłe PG, PC, do tegoż wspólnego przecięcia, te linie będą prostopadłe jedna do drugiej: a stąd prostopadłe będą do siebie i te dwie płaszczyzny.

17. *Wniosek.* Gdy linią iaką prostopadłą jest do płaszczyzny, a na tejże płaszczyźnie pociągniemy iakąkolwiek inną linią, i do tej spuścimy drugą prostopadłą od spodka pierwszej prostopadłej; poprowadziwszy potem od któregokolwiek punktu pierwszej prostopadłej, linią do punktu, w którym druga prostopadła spotyka linią pociągniętą na płaszczyźnie; ta ostatnia linia poprowadzona, prostopadłą będzie do linii na płaszczyźnie pociągniętej. Niech

Táb. I.

Fig. 3.

Niech będzie SP, prostopadłą do płaszczyzny: pociągniemy na téż płaszczyźnie linią AB, i spuścmy do nięj prostopadłą PD od spodka P; lini SP. Poprowadziwszy z punktu któregokolwiek, na przykład S, lini prostopadłą SP, linią SD, do punktu D, w którym prostopadła PD spotyka linią AB, ta linią SD, będzie prostopadłą do AB.

Przez punkt P, przeciągniemy EF równoodległą od AB.

Ponieważ linią SP prostopadłą jest do płaszczyzny danej, będzie też prostopadłą i do EF znajdujący się na téj płaszczyźnie: a wzajemnie i EF będzie prostopadłą do SP. Taż linią EF, iako równoodległą od AB, jest też prostopadłą do PD, a zatem będąc prostopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także prostopadłą i do płaszczyzny SPD przechodzącej przez te dwie linie; więc i AB równoodległą od EF będzie też prostopadłą do płaszczyzny SPD, a w szczególności będzie prostopadłą do linii SD, znajdujący się na téj płaszczyźnie.

18. Twierdż: 11. Gdy płaszczyzna jedna prostopadłą jest do drugiej, a przez którykolwiek punkt jednéj z tych płaszczyzn pociągniemy prostopadłą do drugiej, ta prostopadła, padnie na spólne przecięcie tych dwóch płaszczyzn.

Do-

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 29

Dowódz: Gdyby linią SP nie padała na wspólne przecięcie dwóch płaszczyzn, tedy spuściwszy z tegoż samego punktu S, prostopadłą do wspólnego przecięcia, ta byłaby oraz prostopadłą i do drugiej płaszczyzny: a zatem dwie prostopadłe z jednego punktu spuszczone byłyby na jedną płaszczyznę, co być nie może.

19. *Twierdź:* 12. Gdy dwie płaszczyzny, które się przecinają prostopadłe są do trzeciej, wspólne przecięcie tychże dwóch płaszczyzn, prostopadłe też będzie do tejże trzeciej płaszczyzny.

Dowódz: Od punktu, w którym linią przecięcia dwóch pierwszych płaszczyzn, spotyka trzecią płaszczyznę; pociągnąwszy tak na jednej iak i na drugiej z dwóch pierwszych płaszczyzn prostopadłe do dwóch linii wspólnego ich przecięcia z trzecią płaszczyzną, te dwie prostopadłe, prostopadłemi też będą do trzeciej płaszczyzny: a zatem gdyby te dwie prostopadłe nie zeszły się w jedną, i nie były w rzeczy samej jedną linią, która jest wspólnem przecięciem dwóch pierwszych płaszczyzn; tedy od jednego punktu można by do jednej płaszczyzny dwie prostopadłe wyprowadzić: to zaś być nie może.

20. *Twierdź:* 13. Gdy jedna linią prostopadłą jest do dwóch płaszczyzn, te dwie

dwie płaszczyzny nigdzie się z sobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowód: Gdyby te dwie płaszczyzny mogły się spotkać z sobą, tedy Trójkąt zrobiony z tcy prostopadłej i z dwóch linii poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na spólném przecięciu dwóch tych płaszczyzn, do punktów, w których prostopadła spotyka też płaszczyzny, miałby dwa kąty proste: co byź nie może.

Defini: Dwie płaszczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywają się *równoodległemi*.

21. *Twierdż:* 14. Gdy dwie linie są równoodległe względem dwóch drugich, płaszczyzna przechodząca przez dwie pierwsze linie, będzie równoodległą od płaszczyzny przechodzącej przez dwie drugie linie.

Táb. I.
Fig. 7.

Niech będą dwie linie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE, DF; płaszczyzna przechodząca przez linie AB, AC, równoodległą będzie od płaszczyzny przechodzącej przez linie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwszymi liniami spuścmy prostopadłą AG do płaszczyzny przechodzącej przez drugie dwie linie, i
od

O potożeniu tak Linii iako i Płaszczy: 31

od spodku G, téy prostopadłéy poprowadźmy na téżże samey płaszczyźnie liniię GH, GI, równoodległé względem linii DE, DF.

Liniią AG, prostopadłą do drugiéy płaszczyzny, iest téż prostopadłą, i do linii GH, GI: a że liniię AC, GI, są obie-dwie równoodległé od linii DF; więc i od siebie są równoodległémi: a zatem liniią AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że liniią AG, iest téż prostopadłą i do linii AB. Więc ta liniią AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy, przez liniię AB, AC; a zatem i dwie płaszczyzny przechodzące iedną przez liniię AB, AC, drugą przez liniię DE, DF, są obiedwie prostopadłé do téżże samey linii AG, a przeto są od siebie równoodległé.

22. Twierdż: 15. Gdy dwie płaszczyzny równoodległé od siebie przeciną trzecią płaszczyzną, ich spółné przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą téż od siebie równoodległé.

Dowodz: Gdyby té spółné przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego spółného przecięcia dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby
téż

też tak do iednéy, iak i do drugiéy z dwóch płaszczyzn przecinających trzecią: a zatem dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to jest, nie byłyby iak są równoodległe.

23. *Twierdź: 16.* Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; linią którą jest prostopadłą do iednéy, z tych płaszczyzn, będzie prostopadłą i do drugiéy.

Táb. I.
Fig. 7.

Niech będą dwie płaszczyzny równoodległe: BAC, EDF; i linią AG prostopadłą do iednéy z tych płaszczyzn n.p. do pierwszey; taż linią prostopadłą będzie i do drugiéy płaszczyzny.

Jeżeli linią AG, nie jest prostopadłą do któreykolwiek linii, takiéy iak GH, przeciągnionéy przez spodek G, téżé linii AG, który jest na płaszczyźnie EDF; tedy przeciągnąwszy przez linię GH, AG, płaszczyznę, którą by przecięła płaszczyznę BAC, w linii AB; linią AG będzie prostopadłą do linii AB: więc linię AB, GH, z których jedna jest, a druga nie jest prostopadłą do linii AG, leżącey na téżé saméy, co one, płaszczyźnie, spotkać się mogą z sobą: a przeto i płaszczyzny, na których leżą spotkać się też z sobą mogą, i nie będą równoodległe: co jest przeciwko warunkowi.

O położeniu tak Linii iako i Płaszc: 33

24. *Twierdza 17.* Gdy dwie linie leżące albo nie leżące na iednej płaszczyźnie, przecięte są przez trzy równoodległe od siebie płaszczyzny, te linie będą od tych płaszczyzn przecięte proporcjonalnie.

Niech będą dwie linie AB, CD, leżące, albo nie, na iednej płaszczyźnie: Táb. I.
Fig. 8. niech trzy płaszczyzny równoodległe przecinają pierwszą linią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach C, G, D; będzie, $BF:AF=CG:DG$.

Poprowadźmy linią BD, spotykającą płaszczyznę średnią w punkcie E.

Linie EF, AD, są spólnemi przecięciami płaszczyzny BAD, z dwiema płaszczyznami równoodległemi; więc te dwie linie są od siebie równoodległe; a zatem podobne są Trójkąty BFE, BAD; przeto, $BF:AF=BE:ED$.

Dla téż przyczyny podobne będą i Trójkąty BDC, EDG, a zatem $BE:ED=CG:GD$. Więc też będzie, $BF:AF=CG:GD$.

Uwaga. W tym razie tylko linie BC, AD są równoodległe, i oraz linie FE, EG, iedną czynią linią, gdy linie AB, CD na téż samę płaszczyznę znajdują się.

C

ROZ.

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych.

Defin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyźnie: od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokacie wy-
ciagniemy linię do jednego punktu, nie
na tęj płaszczyźnie będącego. Przy tym
punkcie tyle się zrobi kątów przez na-
chylenie iednój płaszczyzny do drugiey,
ile Wielokąt rozpród wykreślony, miał
boków. Summa tych wszystkich kątów,
nazywá się *kątem Bryłowym* (*angulus solidus*). Punkt, który iest spólnym wierz-
chołkiem wszystkich kątów z nachylenia
tych płaszczyzn pochodzących, nazywá
się: *wierzchołkiem kąta bryłowego*. Pła-
szczyzny schodzące się w tym wierzchołku
nazwać można *ścianami* (*paries* albo *fa-
cies*;) a zaś spólne tych płaszczyzn prze-
cięciá *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes*.)

Prześtroga. W tém wszystkiém, co
się tu o kątach bryłowych powie, wy-
stawać sobie trzeba nie insze Wieloką-
ty, iak tylko te, których boki schodząc
się w jch wierzchołkach, same kąty
wyskakujące tam czynią (b).

Trzy

(b) Obacz o inszych kątach bryłowych,
Rozprawę P. Bermanna, pod tytułem *De an-
gulis solidis Dissertatio Vitembergae 1764.*

O Kątach Bryłowych. 35

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzajemne tych ścian, i stosunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposób, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iednój z tym placem płaszczyźnie znajdującego się. (*Sphæra*): Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może być na Trójkąty, podzielony przez przekątne ciągnięte od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na insze kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Jeometrowie náywięcéj się bawią około kątów bryłowych, trzema kątami Płaskimi określonych, aby doszli pochyłości ścian, lub ich wielkości: a potem wiadome mając dostatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczają kąt bryłowy, który się z tych ścian uktada. Część ta Jeometrii, w której o kątach bryłowych rzecz iest, pod tą, pod którą ię wystawiliśmy postacią, nazywá się Trygonometrią *kulną*, albo sferyczną. (*Trigonometria sphærica*). Jest ona koniecznie potrzebná Astronomóm, a częstokroć i w Jeometrii praktycznej, wziętėj w całej swojej obszerności. Na daniu pierwszych o nię początków, tu

Ca. prze-

przeftaniemy, i nie więcéy mówić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podać ściągających się do samychże brył.

25. *Twierdż: 1.* W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, suma dwóch z tych trzech kątów, większą jest od kąta trzeciego.

Táb. II.
Fig. x.

Dowódz: Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaskich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mniejszy jest od summy dwóch innych.

Jeżeli te trzy kąty są wszystkie równe, już oczywiście dwa, większe są od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden n.p. BAC, większy jest tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD; tedy wszelako mniejszy będzie od summy obudwóch.

Zróbmy albowiem na płaszczyźnie BAC, kąt BAE równy kątowi n.p. BAD, i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, n.p. B; przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaszczyzna przecinająca krawędź AC w punkcie C.

Dwa

Dwa Trójkąty: BAD, BAE, mają bok spólny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Trójkąty mogą przystać do siebie, a w szczególności, linie: BD, BE, są równe. A że w Trójkącie, BDC, summa boków: BD, CD większą jest od trzeciego boku: BC, więc bok DC, większy jest od linii CE: a zatem Trójkąty: CAD, CAE mają bok spólny AC, boki: AD, AE, równe; podstawa zaś DC, jednego, większą jest od podstawy CE, drugiego: więc kąt: CAD, w wierzchołku pierwszego Trójkąta, większy jest od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i summa kątów: BAD, CAD, większą jest od summy kątów: BAE, CAE, to jest: większą od kąta BAC.

26. *Twierdz. 2.* W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mniejsza jest od summy czterech kątów prostych. (c) Do-

(c) Trzeba mieć na pamięci, że się tu mówi tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspierają się na wierzchołkach Wielokąta, mającego same tylko kąty wyskakujące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe także, w których summa kątów płaskich, będzie większą od 4 kątów prostych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewieńczyk pierwszy tę prawdę odkrył, która też pierwszą i sama jedyną zdaje się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz *Historia Akademii Nauk Paryzkiej* na Rok 1756.

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wspieraia się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wierzchołkami tylu inszych kątów bryłowych zrobionych przez katy trzy płaskie, ile tén Wielokąt má wierzchołków: gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduia się przy podstawach ścián tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, toieft: do Wielokąta, na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku wspieraia.

Na każdej z tych ścián summa trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podstawie ściań, równa się summie dwóch kątów prostych; a zatem summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścián, równać się będzie, dwóm kątóm prostym tyle razy wziętym, ile má ścián kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podstawach ścián, większa iest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtými robi kąt ieden bryłowy przy téy podstawie: a zatem summa wszystkich kątów przy podstawach ścián wszystkich, większa iest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc

O Kątach Bryłowych. 39

Więc summie wszystkich kątów, przy podstawach ścian, mniej nie dostaje do summy dwa razy tylu kątów prostych, ile Wielokąt, czyli podstawa kąta bryłowego, má boków; niżeli summie wszystkich kątów Wielokąta tego nie dostaje do téżże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten Wielokąt má boków.

A że summie kątów wszystkich Wielokąta do przekrezonej summy, brakuje 4. kątów prostych; więc summie kątów wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do téżże summy mniej niż 4. kąty proste. Że zaś summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, spełnia ten niedostatek mniejszy od 4. kątów prostych; więc summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mniejsza jest od 4. kątów prostych.

To Twierdzenie objaśnić trzeba przez wiele przykładów szczególnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego n.p. 3, 4, 5, 6, i t.d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t.d. będzie wyrażać boki Wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś kątów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t.d. kątów prostych; a zatem summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcej niż 2, 4, 6, 8, i t.d. kątów

tów prostych. Że zaś summa tych ośmiu kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12; więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mniejsza jest, niż nadmiar (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To jest: ta summa kątów przy wierzchołku mniejsza jest od 4. kątów prostych.

Można prawdę tego twierdzenia okazać i w sposób następujący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, w pośrodku Wielokąta, i pociągniemy od niego linie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta, podług ciągu linii prostopadłej do tej płaszczyzny. Im bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta; tym bardziey zmniejszy się każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniami, od niego poprowadzonymi do wierzchołków Wielokąta: a zatem tém mniejsza będzie summa wszystkich kątów przy tym punkcie, od summy pierwszej 4. kątów prostych.

O Kątach Bryłowych. 41

27. *Przystosowanie*. Pięciorakie tylko jest *Połączenie* (Combinatio) kątów należących do Wielokątów forennych, z których może się złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Trójkąta równobocznego, każdy taki kąt wazyłby $\frac{2}{3}$ kąta prostego, a zatem summa ich wazyłaby 2, kąty proste.

2. W kącie bryłowym, złożonym ze czterech kątów Trójkąta równobocznego, summa takich kątów, wazyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proste.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Trójkąta równobocznego summa takich kątów wazyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proste.

Sześć kątów Trójkąta równobocznego, wazy kątów prostych cztery. Są one zdadne do napełnienia placu, około punktu iakiego na płaszczyźnie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcéy niż szesciu takowych kątów, wazyłaby téż więcéy niż cztery kąty proste.

4. W kącie bryłowym złożonym ze trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt byłby kątem prostym : a zatem summa

ma takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych: summa 4 kątów kwadratu, byłaby summa 4 kątów prostych; a przeto z 4 takowych kątów składać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziej. składać się nie może z większej liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym ze trzech kątów, Pięciokąta foremnego, każdy takowy kąt wazyłby $1\frac{2}{5}$ kąt prosty; a zatem summa ich wazyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proste.

Summa czterech takowych kątów, a tém bardziej więcej niż czterech, wazyłaby więcej niż cztery kąty proste.

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego wazy cztery kąty proste, a zatem żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego: tém bardziej zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcej niż sześć boków mają.

Jeżeli tedy znajdują się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty jednokowego tylko gatunku; takich brył gatunków, więcej iak pięć być nie może.

Bryła, której każdy kąt bryłowy złożony jest z trzech kątów Trójkąta równobocznego, má 4. ściany, z których
każda

43. O Kątach Bryłowych.

każdą jest Trójkątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywają się *Czworościanem* (Tetraedrum).

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 4 kątów Trójkąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda jest Trójkątem równobocznym, i 6 kątów bryłowych. Nazywają się *Ośmiościanem* (Octaedrum.)

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 5 kątów Trójkąta równobocznego, ma 20 ścian, z których każda jest Trójkątem równobocznym, i 12 kątów bryłowych. Nazywają się *Dwudziestościanem* (Icosaedrum.)

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda jest kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywają się *Sześcianem* (Hexaedrum,) a zwyczajnięcy (*Cubus*.)

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 3 kątów Pięciokąta foremego, ma 12 ścian, z których każda jest Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywają się *Dwunastościanem* (Dodecaedrum.)

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszernie w tę materję rozwodzenia się, które więcęcy samey

samę ciekawości dogadzaia niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty mają równe i wszystkie ściany foremne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywają się bryłami foremnymi.

Gdybyśmy w kącie bryłowym pomieścić chcieli różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększoną.

28. *Twierdz. 3.* Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Táb. II.
Fig. 2.

Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich: np. pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa jest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe linie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad: wyniesmy do AB, prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadźmy do tychże linii

O Kątach Bryłowych. 45

linii AB, ab, prostopadłe: BQ, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatem dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

Dowodz: Dwa Trójkąty DBA, dba są prostokątne w B i b; mają równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przystać do siebie: a w szczególności, linie: BD, bd są równe, iako też i linie AD, ad.

Dla téż przyczyny i Trójkąty BAC, bac przystać do siebie mogą a w szczególności linie BC, bc, są równe iako też i linie AC, ac.

Więc Trójkąty CAD, cad, mają boki AC, ac równe; i boki AD, ad, także równe, a mając oprócz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przystać do siebie mogą: w szczególności zaś linie CD, cd, są równe.

Więc Trójkąty: CBD, cbd, mają wszystkie boki równe iedne względem drugich, a zatem do siebie przystać mogą: a w szczególności kąty: CBD, cbd, są równe.

29. *Twierdz:* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, składają się z trzech kątów płaskich, które równe są iedne względem drugich,
ta-

takie kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Niech będzie kąt bryłowy w A , złożony z trzech kątów płaskich: BAD , BAC , DAC , równych względem kątów płaskich: bad , bac , dac , z których się składa kąt drugi bryłowy w a : te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a , przypadł na wierzchołek A , linią zaś ab , aby leżała na linii AB . Pónieważ kąty: BAD , bad , wzięte są za równe; linią więc ad , będzie też leżeć na linii AD .

A że trzy kąty płaskie w a , równe są trzem kątóm w A , równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD , BAC , i płaszczyzn bad , bac : a zatem płaszczyzna bac , leżeć będzie na płaszczyźnie BAC . Dla równości zaś kątów bac , BAC , linią ac leżeć będzie na linii AC ; więc tak linią ad , leży na linii AD , iak i ac na AC : a zatem płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD : przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

36. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskiemi, już tém samém jest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Można-

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy mając wiadome dwa z tych kątów i pochyłość ich ścian, wyznaczyć się także kąt bryłowy; iako też z wiadomej tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Tę jednak ostatnie podania, iż nie służą do naszego zamierzenia, przeto dosyć jest tu o nich tylko namienić.

31. Zagadn. 1. Zrobić kąt bryłowy, mając dane trzy kąty płaskie, z których może być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3 kątów płaskich; następujący sposób, zdaje się być náywygodniejszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wyftawmy sobie myślą, iż ten kąt już jest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi n. p. AC; i od tego punktu, spuścmy na in-sze krawędzie, AB, AD, linie prostopadłe: CB, CD: a znowu od punktów B, i D, na płaszczyźnie BAD, poprowadźmy do téż krawędzi, prostopadłe: BE, DE, które się przetną, w punkcie E. Pociągniemy na koniec linie: CE, AE.

Táb. II.
Fig. 3.

Ponieważ linii CB , EB , są prostopadłe do linii AB , linią więc AB jest prostopadłą do płaszczyzny: CBE ; a zatem płaszczyzna BAD , która przechodzi przez linią AB , jest też prostopadłą do płaszczyzny: CBE ; a wzajemnie, i ta płaszczyzna jest do tamtej prostopadłą. Dla téż przyczyny, płaszczyzna, CDE , prostopadłą jest do płaszczyzny BAD ; więc obiedwie płaszczyzny: CBE , CDE , prostopadłe są do płaszczyzny BAD ; a zatem wspólne ich przecięcie CE , jest także prostopadłym do płaszczyzny BAD ; i płaszczyzna CAE , jest także prostopadłą do téż płaszczyzny BAD . Skąd wypada takowe wykreślenie.

Po obudwóch stronach linii ac , przy punkcie a , nakreślmy kąty: cab , cad , równe względem kątów danych CAB , CAD . Od punktu któregokolwiek téż linii ac , n.p. od c spuścmy na dwa drugie ramiona, ab , ad , linie prostopadłe: cb , cd ; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zaczawszy od wierzchołka A , linie AB , AD , równe względem linii ab , ad . Od punktów B , i D wyprowadźmy prostopadłe do linii AB , AD , przecinające się w punkcie E , a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC , do płaszczyzny BAD . Niech przez linie EC , i AE przechodzi insza płaszczyzna, na której z punktu A , iak ze środka, promieniem równym odległości ac ,
na-

nakreśliśmy łuk koła, który przetnie prostopadłą EC , w punkcie C ; naostatek przez punkt C , i linię AB , AD ; niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszczyzną BAD , robią kąt bryłowy, którego szukamy.

Inaczej jeszcze punkt C , będzie wyznaczony na prostopadłej EC ; gdy tyła linią, EC , weźmiemy, aby kwadrat ięć równał się różnicy kwadratów: linii ac , i AE , albo różnicy kwadratów: cd , i DE , albo nakoniec różnicy kwadratów: bc i BE .

32. Uwaga. Używając tego wykreślenia, można łatwo dowieść następujące Twierdzenie, na którym się zasadza Trygonometria kulna, to jest, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym ze trzech kątów płaskich, wstawia jednego kąta płaskiego, jest do wstawy drugiego, iak wstawia kąta pochyłości przeciwnego pierwszemu kątowi, do wstawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi: to jest, iak wstawia kąta pochyłości płaszczyzn dwóch ścian pod pierwszym kątem będących, do wstawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż linie: CD , CB , są wstawami, pierwszą kąta CAD , drugą, kąta CAB ,
D
wzię-

wziawszy za promień linią AC; a zatem te dwie linie tak się do siebie mają, iak wstawy tych dwóch kątów.

A że w Trójkacie ECD. prostokątnym w E; $CD:CE = Pr:Wft. CDE.$

A w Trójk. EBC; $CE:CB = Wft:CBE:Pr:$

Więc złożysz wszystkie te stosunki, będzie; $CD:CB = Wft:CBE:Wft.CDE.$

To jest: Wstawia kąta CAD, tak się ma do wstawy kąta CAB, iak wstawia kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wstawy kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, CAD.

33. Zagadn. 2. Mając dane trzy kąty płaskie, z których się ma składać kąt bryłowy, wyrachować, iaką ma być pochyłość płaszczyzn, aby ten kąt zrobili.

Tab. II. Fig. 3. Sposób 1. W Czworokacie ABED, kąty przeciwne B, i D są proste: więc Czworokąt ten może być w koło wpisany, a zatem kąty (w tymże samym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawszy tedy w Trójkacie BAD kąt ADB, już tem samym znajdziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stosunek boku BC do BE, to jest stosunek

O Kątach Bryłowych. 51

sunek wstawy całej, czyli promienia, do Dostawy kąta pochyłości CBE, składa się z stosunków boków: BC do AB i AB do BE.

A że iest; $BC:AB = \text{Stycz. BAC}$; Wst: całej,

i $AB:BE = \text{Wst. cała}$: Dostycz. AEB
więc; $BC:BE = \text{Stycz. BAC}$: Dost. AEB

A zatem;

Dost: AEB = Pr: Dost: CBE. Stycz. BAC:

Sporób 2. Wyciągnąwszy od punktu jednego n.p. B znajdującego się na którejkolwiek krawędzi kąta bryłowego, prostopadłe: BD, BC; do téj krawędzi, a na dwóch płaszczyznach, których wspólnym przecięciem iest ta krawędź, niech te dwie prostopadłe spotykają dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Linie BC, BD będą stycznymi, a linie AC, AD będą siecznymi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień linię AB. Więc te linie, mogą być wyrachowane na miarę linii stałej AB, czyli promienia. W Trójkacie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Trójkacie zatem CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a stąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który iest kątem pochyłości dwóch płaszczyzn: BAD, BAC. Juszé téż kąty pochyłości łatwo wyznaczamy podług uwagi poprzedzającej. (12)

Dz

PRZY-

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁÓW NASTĘPUJĄCYCH

O podniesieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, i o wyciągnięciu Piérwiástku Sześciennego, albo Kubicznego.

Przed następującemi Rozdziałami, kładzie się nauka o podniesieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Piérwiástku sześciennego: bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przystósować.

34. Sześcián liczby iakiéy robi się, gdy tę liczbę przez nią samą raz mnożymy, i tak rozmnożoną, jeszcze raz przez nią mnożymy: albo, co na jedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożymy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwszych.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
są: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30. 40. - - - 90.
są: 1 000, 8 000, 27 000, 64 000, - - - 729 000.

Sześciany liczb:

100. 200. 300. - - - 900.
są: 1 000 000, 8 000 000, 27 000 000, 729 000 000.

O Kątach Bryłowych. 53

35. Sześciiany więc liczb mających iedną tylko cyfrę, a resztę zerów, są te same, co i sześciiany tychże cyfr samych przez się, przydawszy im trzy razy tylé zerów, ile ich było w liczbie z której się Sześcián robi.

Wyraz *tén Sześcián*, wzięty iest z Jeometryi, w której, aby mieć bryłowość iakięgo Sześcianu; rozmnaża się liczba wyrażająca wielkość boku ięgo, raz i drugi przez siebie.

Sześcián każdéy liczby znaleźć można, mnożąc ię kwadrat przez nie samę; podamy tu iednak inszy sposób zrobienia Sześcianu z liczby danéy, a *tén* sposób pomoże nám do przeciwnégo działaniá, toieft do wyciąganiá Pierwiástku Sześciennégo z liczby iakiękolwiek.

36. Sześcián liczby, złożony ze dwóch części, może bydź rozłożony na cztery części następujące:

1. Na Sześcián pierwszéy części.
2. Na Kwadrat pierwszéy części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.
3. Na Kwadrat drugiéy części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwszą.
- 4.

4. Na Sześcián drugiéy części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części na przyk: 1, i 4; można uważać iéy Sześcián, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa jest: 125. Gdybyśmy zaś tę samą liczbę 5. uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iéy Sześcián mógłby się być rozłożyć na cztery części: 8, 36, 54, 17.

Niechby potrzeba znaleźć Sześcián liczby n p. 47; Ponieważ iéy kwadrat (podług reguły już nam wiadomey) składa się z kwadratu pierwszéy części 40; z téjże części 40, dwa razy wziętéy, przez drugą, 7. rozmnożonéy, i z kwadratu drugiéy części 7; mnożąc cały tén kwadrat ieszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcián z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożónego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu téjże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcián z 47, składać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat liczby 40, dwa razy wzięty, i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty: a razem to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby

liczby 40, z kwadratu tężże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7 z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę 103 823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś nie można ieszcze do wieśdz tego Algiebraicznie; trzeba przynajmniey będzie z Jeometryi zaciagnąć objaśnienia, pokazując: że Sześcian linii złożoney ze dwóch części, może bydź w rzeczy samey rozłożony na Sześciany każdéy z tych dwóch części, i na 6. Równoległoscianów: z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iedney części, a za wysokość część drugą; trzy zaś insze, mieć będą za podstawę kwadrat drugiey części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Náywygodniey iest, rozłożyć liczbę na iedności, dziesiątki, ita, i t.d. które w sobie zawierają.

Niech będzie liczba n. p. 12. Podzielmy ją na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey składać się będzie z części następujących:

1000.

56. GEOMETRYI C. II. ROZDZIAŁ II.

1 000. Sześcián dziesiątku

600. Kwadrat dziesiątku trzy razy
wzięty przez jedności rozmnożony.

120. Kwadrat jedności trzy razy
wzięty przez dziesiątek rozmno-
żony.

8. Sześcián dwóch jedności.

1 728. Sześcián z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana
na dwie części 80, i 4; Sześcián ięć mieć
będzie części następujące:

512 000. Sześcián dziesiątków,

76 800. Kwadrat dziesiątków trzy
razy wzięty, przez jedno-
ści rozmnożony.

3 840. Kwadrat tychże jedności
trzy razy wzięty przez dzie-
siątki rozmnożony.

64. Sześcián z jedności.

592 704. Sześcián z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana
na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć
Sześcián pierwszej części, rozłożmy ją
na części 300, i 20.

O Katak. Bryłowych. 57.

27 000 000. Sześcián flów

5 400 000. Kwadrat flów potrójny
przez dziesiątki rozmnożony.

360 000. Kwadrat dziesiątków po-
trójny, przez sta rozmno-
żony.

8 000. Sześcián dziesiątków.

1 228 800. Kwadrat z 320 potrójny
rozmnożony przez iedności.

15 360. Kwadrat z jedności potrój-
ny, rozmnożony przez 320.

64. Sześcián iedności.

34 012 224. Sześcián z 324.

Niechby trzeba zrobić Sześcián z 8421.

512 000 000 000. Sześcián z 8000.

76 800 000 000. Kwadrat z 8000.
potrójny, roz:
przez 400.

3 840 000 000. Kwadrat z 400.
potrójny, roz:
przez 8000.

58 GEOMETRYI C. II. ROZDZIAŁ II.

64 000 000.	Sześcián	z 400.
4 233 600 000.	Kwadrat	z 8400.
	potrójny, roz:	
	przez	20.
10 080 000.	Kwadrat	z 20.
	potrójny, rozm:	
	przez	8400.
8 000.	Sześcián	z 20.
212 689 200.	Kwadrat	z 8420.
	potrójny, roz:	
	przez	1.
25 260.	Kwadrat	z 1.
	potrójny, rozm:	
	przez	8420.

1.	Sześcián	z 1.
597 160 402 461.	Sześcián	z 8421.

39. Widzimy na poprzedzających przykładach, iż przez takowy rozbiór, każda część następująca Sześcianu mniej ma jednym zerem, od części, która ją poprzedziła: i że iako pierwszą część Sześcianu jest zawsze Sześcianem, a po nim następują dwie części, każda złożona z potrójnego kwadratu iednej części rozmnożonego przez część drugą; tak i dalej, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składających Sześcián.

O Katakach Brytowych. 59

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdej części następującej występować z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześciannu z 324 mogły być w ten sposób wypisane.

27

54

36

8

12288

1536

64.

34012224.

41. Ten sposób postępowania, pokazując nam, że liczba wyrażająca Sześciannę jedności, kończy się na ostatniej po prawej ręce cyfrze, że Sześciann dziesiątków kończy się na czwartej od prawej ręki cyfrze, liczba Sześciannu stów, kończy się na siódmej cyfrze od tejże strony rachując, i t. d.

Żeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażających Pierwiastek Sześciannu danego, trzeba od prawej strony zaczynać, oddzielić co trzy cyfry kreskami poczynić: a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie się znajdowało w Pierwiastku. Oddział pierwszy po lewej stronie

nie może mieć trzy, dwie, a czasem i jedną tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzające okazują. I tak Pierwiastki sześciennie liczb 1, 331; 32, 767; 226, 981; mają dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiastek sześcienny.

Ta liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku, bo dwa w niej uczynić można oddziały, tym sposobem: 1, 331. Naywiększą liczbą dziesiątków tego Pierwiastku taką być powinna, aby iey Sześcián nie był większy od 1: a zatem będzie tylko jeden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcián z 10, iest: 1000; który Sześcián odiawszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potrójny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności: potrójny kwadrat tych iedności; rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcián tychże iedności. A że w szczególności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potrójny dziesiątka; rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sám potrójny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331, przez 300, podzielonych, iest: 1; więc iedna iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a tę, od 331, odiawszy, zostanie 31. Ta reszta ma jeszcze w sobie zamy-

zamykać potrójny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, toiest: 30, i Sześcián iedności, toiest: 1, a ze wszystkiém 31, które odiawszy od ostatniéy reszty nic nie zostanie: a zatem Pierwiástek sześcienny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniemy Pierwiástek sześcienny z liczby 68,921. Pierwiástek téy liczby má dwie cyfry. Liczba dziesiątków taká byđ powinna, aby Sześcián iey odiać można od pierwszego podziału: 68. A że z Tablicy dziewięciu pierwszych sześciannów (34.) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcián náybliższy 68, iest 64. a tego Pierwiástek iest: 4; więc w Pierwiástku będą 4 dziesiątki. Sześcián z 40, iest: 64 000; odiawszy go od 68 921, zostanie 4 921. Ta reszta má w szczególności zawierać w sobie potrójny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, toiest má w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4 921. przez 4800, wypadá 1, na wieloráz; więc będzie w Pierwiástku iedna iedność. Odiawszy od 4 921, kwadrat potrójny 4800. rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta má jeszcze w sobie zawierać kwadrat potrójny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, toiest 120, i Sześcián iedności, toiest 1, a ze wszystkiém, 121; które odiawszy od ostatniéy reszty, nic nie zostanie: a zatem Pierwiástek zupełny będzie: 41. Wy-

Wyciągniemy Pierwiastek sześcienny z liczby 884, 736. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian najbliższy liczby 884, jest: 729, którego Pierwiastkiem jest: 9; więc Pierwiastek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcian z 90, jest 729 000, który odjąwszy od 884 736, zostanie 155 736. Kwadrat z 90, jest 8 100, potrójny będzie: 24 300. Dzielać przez 24 300, resztę 155 736, na wieloraz wypada 6; więc Pierwiastek mieć będzie 6. Jedności. Rozmnożywszy 24 300 przez 6, będzie 145 800, które odjąwszy od 155 736, zostanie 9 936. Kwadrat potrójny 6 Jedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9 720, odjąwszy go od 9 936, zostanie 216, nakoniec Sześcian z 6, jest 216; a zatem Pierwiastek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, jest: 884, 736.

Wyciągniemy Pierwiastek sześcienny z liczby 590, 589, 719. Ten powiemić mieć trzy cyfry.

Liczba stów w Pierwiastku taká bydz powinna, aby iey Sześcian, nie przechodził 590. Z dziewięciu pierwszych Sześcianów, najbliższy liczby 590 jest Sześcian: 512, którego Pierwiastek jest 8; a zatem 8 stów będzie w Pierwiastku. Odiąwszy 512 000 000, od Sześcianu danego, zostanie 78 589 719. Kwadrat

O Katach Bryłowych. 63

kwadrat potrójny stów 8, albo 800, to jest 1 920 000 : znayduie się razy 40 w téj reszcie: mogłoby więc zdawać się, iż 4 dziesiątki Pierwiastek mieć powinién; aleby nie można od 78 589 719 odjąć dwóch inszych części, to jest kwadratu potrójnego dziesiątków rozmnożonego przez sta, i Sześciannu dziesiątków: nie można przeto więcej dać Pierwiastkowi, iak 3 dziesiątki. Liczbę 1 920 000, rozmnożoną przez 30, to jest 57 600 000, odiawszy od 78 589 719, zostanie 20 989 719: od téj reszty odiawszy znowu kwadrat potrójny 3 dziesiątków, przez sta rozmnożonych, to jest 2 160 000, zostaje 18 829 719 a po odjęciu Sześciannu dziesiątków, to jest 27 000, będzie w reszcie, 18 802 719. Kwadrat potrójny części Pierwiastku znalezionej, to jest liczby 830, jest 2 066 700; przez ten dzieląc resztę 18 802 719, wypadnie 9 iedności na wieloráz. Odiawszy od téj reszty, liczbę 2 066 700, rozmnożoną przez 9, to jest: 18 600 300, zostanie 202 419: skąd znowu odiawszy kwadrat potrójny iedności 9, rozmnożony przez 830, to jest 201 690, zostaje 729. Naostatek Sześciann z 9, jest: 729, a zatem Pierwiastek, którego szukaliśmy, będzie 839.

Wzór działań w przykładach poprzedzających.

Przykład 1. Przykład 2.

$$\begin{array}{r|l} 1,331, & 10. \\ \hline 1000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 68,921 & 40 \\ \hline 64.000 & \end{array}$$

$$300 \left| \begin{array}{r|l} 331 & 1. \\ \hline 300 & \end{array} \right. \quad 4800 \left| \begin{array}{r|l} 4921 & 1. \\ \hline 4800 & \end{array} \right.$$

31.

121.

30

120

1.

1

1

1

0

0

Przy

O Kątach Bryłowych. 65

Przykład 3.

$$\begin{array}{r} 884,736. | 90 \\ \hline 729\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24\ 300 | 155\ 735 | 6. \\ \hline 145\ 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 935. \\ \hline 9\ 720. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 216. \\ \hline 216. \end{array}$$

0.

Przykład 4.

$$\begin{array}{r} 590,589,719. | 800 \\ \hline 512\ 000\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 920\ 000 | 78\ 589\ 719 | 30. \\ \hline 57\ 600\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20\ 589\ 719. \\ \hline 2\ 160\ 000. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18\ 829\ 719. \\ \hline 27\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 666\ 700 | 18\ 802\ 719 | 9 \\ \hline 18\ 600\ 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202\ 419 \\ \hline 201\ 690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \hline 729 \end{array}$$

0.

Więcey takowych przykładów należy podać Ucznióm, nie używając jeszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwsze skrócenie, na tém zawisło, aby opuszczać zera, w liczbach
E dzie-

dzielących, podzielnych, i w wielorazach; mając jednak zawsze uwagę na miejsca, które zastępować przypada cyfróm znaczącym. W szczególności zaś co do wielorazów, będzie ten z opuszczenia zerów pożytek, że zaraz przy sobie kładź będzie można cyfry, wyrażające pierwiastek, którego szukamy.

Drugie skrócenie, związane z pierwszym na tém się zasadza, aby do każdego następującego dzielenia, tyle tylko cyfr z Szescianu przyłączać do reszty pozostałej; ile ich wyciągać będzie przypadające odejmowanie: daremna bowiem byłaby praca, przy każdym odejmowaniu, wszystkie pozostałe Szescianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnie zwłaszcza cyfry przez większą część działania nienaruszone zostają.

Trzecie skrócenie na tém zawisło, aby za jednym razem odjąć kwadrat potrójny części znalezionej, rozmnożony przez część następującą; kwadrat potrójny téż części drugiej, rozmnożony przez część pierwszą znalezionej, i Szescian téj części drugiej. To zaś wykona się, dodając razem te trzy liczby odejmować się mające, i tak dodane odejmując od Szescianu, z którego Pierwiastek wyciągamy. Zawsze jednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwsey dodawać, a potem ich

sum-

summę odeymować mamy, zachowane było miejsce każdej cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których insze odeymować przypadają.

Przystosowanie. Niechby z liczby 257, 259, 456, trzeba wyciągać Pierwiastek Szescienny. Ten będzie miał cyfr trzy, największy Szescian zawarty w 257, iest 216, którego Pierwiastek iest 6, odiawszy ten Szescian od 257, zostanie 41. Do téj reszty przyłączmy następujący oddział 259, będzie 41 259. Nie mając tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry 59, dzielimy 412 przez potrójny kwadrat z 6, to iest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz summę trzech liczb: 3^{24} 162 , to iest kwadratu potrójnego z 6. 27 stów rozmnożonego przez 3 dziesiątki, kwadratu potrójnego z 3 dziesiątków rozmnożonego przez 6, stów; i Szescianu z 3, dziesiątków. Summę 34 047 odeymiemy od 41 259, zostanie 7 212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7 212 456. Nie uważając tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielimy 72 124 przez kwadrat potrójny z części Pierwiastku znalezionej, to iest przez 11 907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy summę trzech liczb: 71442 6804 to iest kwadrat potrójny części 216 pierwey znalezionej, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potrójny z 6: iest

Est dno-

dności, rozmnożony przez część pierwy
znalezioną, i Sześcián z 6. iedności.
Summa 7 212 456. równa się reszcie o-
statniéy: co znakiem iest, że Pierwia-
stek, którego szukaliśmy, ani mniejszy
ani większy iest, iak 636. (d)

44. Aby wyciągnąć Pierwiąstek Sze-
ściénny z ułomku, którego tak licznik,
iako i mianownik iest Sześciánem; trze-
ba go osobno wyciągać z każdego z tych
wyrazów. I tak Pierwiąstek sześciénny
z $\frac{125}{216}$, iest $\frac{5}{6}$. Pierwiąstek z $\frac{64}{343}$ iest $\frac{4}{7}$.
Aby zaś wyciągnąć Pierwiąstek Sześcién-
ny z liczby mieszanej; trzeba ją pierwy
zamiénic na ułomek. I tak Pierwiątki sze-
ściénne liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, są té
same co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. to iest: $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{3}$,
albo $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$.

45. Co się o Pierwiątku kwadrato-
wym powiedziało (w Części I. Geom: §
128) ściągá się i do Pierwiątku sześcién-
ného: to iest, że iezeli nie można mieć
Pier-

(d) To działanie bardziéy długie, niż
trudné, wyciągá od Uczniów częstégo w nim
ćwiczenia się; a dla większey łatwości niech
sobie tén ostatni przykład wypiszą, tym, co
wyżey porządkiem, i każdego w szczegó-
lności na n.m. działania niech dadzą Nauczy-
cielowi sprawę.

Pierwiastku Szesciennego liczby całkowitej, w liczbach całkowitych; tedy go i w ułamkach nie znajdziemy. Dowodzi się to ogólnie tymże samym, iak względem Pierwiastku kwadratowego, sposobem.

46. Pierwiastek Szescienny liczby iakiej, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposób najoogólniejszy iest, używając do tego ułamków dziesiętnych. Niechby n.p. trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiastek Szescienny, przybliżając go do prawdziwego w częściach tysięcznych. Wyciągamy ten Pierwiastek, sposobem dopiero podanym, z liczby 2 000 000, 000, a ostatnie trzy tego Pierwiastku cyfry położmy za dziesiętne. Pierwiastek Szescienny liczby: 2 000 000 000 w liczbach całkowitych najbliższych wyrażony, iest: 1 259; a zatem Pierwiastek Szescienny liczby 2, przybliżony aż do części tysięcznych iedności, będzie 1, 259. Jakoż Szescian z 1, 259, iest: 1, 995 616 979 mniejszy od 2, a Szescian z 1, 26, iest: 2, 259 576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiastek Szescienny liczby n. p. 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułamkach zwyczajnych, podwójwszy, pierwsze dziewięć Szescianów, z liczb naturalnych, 1, 2, 3, 4. i t. d. uważać należy. (podobnie iako się o przybliżeniu

zeniu Pierwiastku kwadratowego w Części I. powiedziało:) jeżeli między temi Szescianami podwoionemi, nie znajduie się taki, któryby blizki bardzo był Szescianu zupełnego. Znajdziemy n. p. że 64. podwoione, toiest 128, mało się co różni od 125, toiest od Szescianu liczby 5: a zatem 2, które równa się wcale $\frac{128}{64}$, będzie iez prawie równe $\frac{125}{64}$, przeto i Pierwiastek Szescienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy, mniej dokładny Pierwiastek Szescienny, podzielmy różnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, toiest $\frac{3}{64}$, przez kwadrat potrójny tego pierwszego Pierwiastku toiest przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiastku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiastkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Szescian z $\frac{126}{100}$ iest 2 $\frac{326}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieszcze zmniejszyć podobnym, iak wyżej, sposobem.

Niechby z liczby 3, trzeba tymże sposobem wyciągnąć Pierwiastek szescienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a pie więte się różni od $\frac{1000}{343}$; a zatem Pierwiastek Szescienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$; a poprawując to pierwsze

wsze

wsze uchybienie, Pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakięgo ułamku, nie iest Szescianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, mianownik stał się Szescianem: potem dopiero wyciągá się Pierwiastek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli się przez Pierwiastek zupełny mianownika. I tak, chcąc wyciągnąć Pierwiastek Szescienny z $\frac{1}{4}$; zamiéniam ten ułomek na $\frac{27}{8}$; a wyciągnawszy z 2, przez przybliżenie Pierwiastek Szescienny: 1,259; biorę jego połowę 0,629; toiest: dzielę go przez Pierwiastek sześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiastek Szescienny z $\frac{5}{12}$, ten sám iest, co i Pierwiastek Szescienny z $\frac{90}{216}$; toiest $\frac{1}{6}$. Pierwiastku sześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach prostokątnych (e).

49. *Defin.* Gdy Bryła jaką zakończoną jest Sześciąścianami prostokątnem to jest Sześcią kwadratami; taką Bryła nazywa się, Równoległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz. I.* W każdym Równoległościanie prostokątnym, Ściany na przeciwko siebie stojące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą jest, do każdej z czterech innych ścian, które z nią wspólne mają bok ieden.

Táb. II.
Fig. 4.
Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny; wspólne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym jest do dwóch innych boków: BC, BA, należących do tychże ścian; więc to przecięcie jest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzący przez lini-

(e) Częste używanie Równoległościanów prostokątnych jest nam pobudką do mówienia o nich w szczególności; tym bardziej, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie prostokątnych Równoległościanów na prostokątne.

O Równoległościach prostokąt: 73

liniie AB, BC, to jest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatem ABGH, BCFG, które przechodzą przez to wspólne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których wspólnym przecięciem jest liniia ED: a zatem cztery ściany Równoległościannu prostokątnego, są prostopadłe do tej ściany, z którą mają po jednym boku wspólnym.

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadła jest do ściany ABCD. Podobnie dowieśćby można, że taż liniia jest prostopadła i do ściany GFEH; więc te obie ściany są prostopadłe do jednej linii GB, a zatem są do siebie równoodległe.

Naostatek w Prostokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH są równe; jako też i liniie BC, FG: a zatem dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przystać do siebie

51. *Uwaga.* Ponieważ w Równoległościannie prostokątnym z czterech ścian otaczających ten Równoległościann, każda ma jeden bok wspólny z bokiem jednej ściany z dwóch pozostałych; przeto można wystawić sobie *rodzenie się* (generatio albo formatio) Równoległościannu prostokątnego, w sposób następujący.

Niech

Niech będzie Prostokąt jakikolwiek, na którego wierzchołkach wszystkich wystawione są prostopadłe do jego płaszczyzny wszystkie równe. Niech ten Prostokąt posuwa się równoodległe od pierwszego swego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów jego wzdłuż linii prostopadłych wznosiły się. Mieysce to, które takowem posuwaniem się przejdzie Prostokąt, będzie Równoległościannym prostokątnym.

52. Defini: Równoległościann prostokątny, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy Sześciannym albo z Łacińskiego, *Kubusem*.

Sześciann więc, jest to Bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzającego, że te 6. kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, na przeciwko siebie stojące są równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspierające się na czterech bokach kwadratu jednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległościann prostokątny, iako zbudowany na jedney ze ścian swoich, prostopadłą spuszczoną na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwny, nazywa się *wysokością* tego Równoodległościannu. Ta zaś
wy-

O Równoległościach prostokąt: 79

wysokość równa jest spólnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twierdź: 2.* Gdy podstawy dwóch Równoległościaków prostokątnych mogą przystać do siebie, a ich wysokości są równe, te dwa Równoległościaki, mogą też przystać do siebie, to jest nie różnią się od siebie tylko miejscem.

Dowód: Wszystkie ściany tych dwóch Równoległościaków, podobnie położone, mogą przystać do siebie; wszystkie też tych Równoległościaków kąty bryłowe, składają się z trzech kątów prostych: a zatem wszystkie te kąty bryłowe mogą przystać do siebie. Przenioszły tedy myślą ieden z tych Równoległościaków, tak, aby ieden z kątów jego bryłowych, przystał do iednego z kątów bryłowych Równoległościaku drugiego, i aby ściany pierwszego kąta, które mogą przystać do ścian drugiego, w samej rzeczy do niego przystały, wszystkie końce krawędzi pierwszego kąta, przystaną do końców krawędzi odpowiadających przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwszego Równoległościaku, które są przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościaku, będące przy końcach tychże ścian odpowiadających pierwszym; a zatem i te kąty bryłowe przystaną iedne do drugich.

§4. *Wniosek.* Podzieliwszy wysokość iakiego Równoległoscianu prostokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszystkie punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstawy; Równoległoscian podzielony będzie na tyle Równoległoscianów mniejszych, które przyśtać do siebie mogą, na ile części była podzieloną wysokość: będą albowiem miały te wszystkie Równoległosciany mniejsze, jednakową wysokość, a takie podstawy, z których każda przyśtać może do podstawy wielkiego Równoległoscianu.

§5. *Twierdź: 3.* Dwa Równoległosciany prostokątne, wystawione na tejże samej podstawie, lub na podstawach mogących przyśtać do siebie, tak się mają jeden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowódz: 1. Gdyby wysokość jednego, Równoległoscianu, była dwa, trzy, cztery i t.d. razy większą od wysokości drugiego; pierwszy Równoległoscian, mógłby się podzielić na 2, 3, 4, i t. d. Równoległosciany mogące przyśtać do drugiego: a zatem ten pierwszy Równoległoscian byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t.d. razy. Co przypisać można, i w jnszych przypadkach, gdzieby tylko wysokość jednego Równoległoscianu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego. 2.

O Równoległościach prostokąt: 77

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległościanu zawierała n.p. 3. takich części, iakich 5 zawiera wysokość drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstaw, podzielibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Równoległościanów iednakowey wysokości, i których podstawy przyrastałyby mogły do siebie: a zatem pierwszy Równoległościan takby się miał do drugiego iak 3, do 5, toieft iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do inszego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec, to co się powiedziało w przypadkach spółmiernych, przytósować można i do przypadków nie spółmiernych, tak iakośmy uczynili, mówiąc o figurach płaskich, w Części I.

Jakoż, niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na téyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przyrastać, i niech té wysokości będą nie spółmierne, wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak wysokości.

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy stosun-

Tab. II.
Fig. 5.

sunkowi ich wysokości; tedy jedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do utznienia tej równości stosunków. Niechże więc, jeżeli to być może, stosunek pierwszego Równoległoscianu, do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE, (większej od AB) do CD.

Podzielmy linią CD na pewną liczbę części równych mniejszych jednak od różnicy BE, i przenieśmy jedną z tych części na linią AB, tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniosłszy dalej ku E, jedną jeszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, n.p. w F.

Równoległosciany mające jednakowe podstawy, a wysokości spólmierne CD, i AF, będą do siebie jak te wysokości CD i AF.

A że (przez przypuszczenie) Równoległoscian, którego wysokością jest AB, tak się ma do Równoległoscianu, którego wysokością jest CD; tak się ma linia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległosciany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie jak linie AE, i AF. Ze zaś pierwszy poprzednik mniejszy jest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od

O Równoległościach prostokąt: 79

od swego następnika; więc proporcya ta nie ma miejsca: a zatem stosunek Równoległościaków, których AB, i CD, są wysokościami, nie jest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: Niech będą oznaczone przez R. AB, R. AF, R. CD, Równoległościaki mające jednakowe podstawy, wysokości zaś: AB, AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcya:

$$R. AB: R. CD = AE: CD.$$

tedy ponie-
waż jest, -- R. CD: R. AF = CD: AF.
bydźby po-
winno -- R. AB: R. AF = AE: AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może; więc ani pierwsza.

56. Twierdż: 4. Dwa Równoległościaki prostokątne mające jednakowe wysokości, są do siebie, jak ich podstawy.

Przenieśmy jeden z tych Równoległościaków, tak, aby podstawa jego stykała się w wierzchołku spólnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie jedną z tych podstaw, a druga: EBGF. Dopełnimy Prostokąta, CBGH przedłużwszy boki, DC, FG, aż do ich spólnego

Táb. II.
Fig. 6.

nego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie w myśli Równoległością trzeci stoiały na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległością: Równoległością, którego podstawą iest: ABCD, i ten, którego podstawą iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby linią CB, a drugim, wysokość spólną obudwóch danych Równoległością są do siebie, iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH.

Podobnie Równoległością, których, CBGH, i BEFG są podstawami, uważane, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym bokiem byłaby linią BG, a drugim spólną wysokość dwóch danych Równoległością, są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległością, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległością, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwszą podstawą do drugiey.

Krócéy

O Równoległościach prostokąt: 81

Krócecy to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następującymi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya.

$$R. ABCD: R. CBGH = ABCD: CBGH.$$

2. proporcya;

$$R. CBGH: R. BEFG = CBGH: BEFG.$$

więc

$$R. ABCD: R. BEFG = ABCD: BEFG.$$

§7. *Wniosek 1.* Dwa Równoległościany prostokątne, jeżeli mają równe tak wysokości, jak i podstawy, są równe; także, jeżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, mają równe podstawy, równe będą i ich wysokości: albo jeżeli równe mają wysokości, równe będą i ich podstawy.

§8. *Wniosek 2.* Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościąn jeden prostokątny, na drugi, jednakową z nim wysokość mający, a któryby za podstawę miał prostokąt, z jednym bokiém danym: to się zaś stanie, zamieniając podstawę Równoległościanu danego, na

F. Pro-

Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz. 5.* Dwa Równoległościanny prostokątne, jeżeli mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe: i wzajemnie, jeżeli dwa Równoległościanny są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrotnym ich wysokości.

Táb. II. Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościannu jednego Prostokątnego; drugiego zaś Równoległościannu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podstawami i wysokościami proporcya:

$ABCD: BEFG = BL: BI$, tedy te Równoległościanny będą równe.

Wystawmy sobie drugi Równoległościann, iakoby zamieniony na inszy téż saméj wysokości BL, a mający za jeden bok swoiey podstawy, bok n p. BC, należący do podstawy pierwszego Równoległościannu, i niech będzie tego nowego Równoległościannu podstawa CBMN.

Będzie zatem podstawa ABCD do podstawy BEFG. iak AB do BM: a żeśmy téż przypuścili $ABCD: BEFG = BL: BI$; więc

O Równoległościach prostokąt: 83

więc będzie $AB: BM=BL: BI$, a zatem Prostokąt mający za boki, AB , BI , równy będzie Prostokątowi mającemu za boki: BM , BL : Że zaś pierwszy i, trzeci Równoległością mają za podstawy te dwa równe Prostokąty, i spólną przy tém mają wysokość BC ; więc są sobie równe. A że trzeci Równoległością równy jest drugiemu; więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech Równoległością, którego $ABCD$ jest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległością, którego podstawą jest $BEFG$; a wysokością BL ; idzie zatem że, $ABCD: BEFG=BL: BI$.

Zróbmy to samo, co wyżej, wykreślenie.

Uważając pierwszy i trzeci Równoległością, iako mające za wysokość spólną, BC , będzie pierwszy do trzeciego iak Prostokąt $AB \times BI$ do Prostok. $BM \times BL$. A że te dwa Równoległością są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu; więc i sobie są równe, więc $AB \times BI=BM \times BL$: a zatem $AB: BM=BL: BI$. Że zaś $AB: BM=ABCD: CBMN=ABCD: BEFG$; więc $ABCD: BEFG=BL: BI$.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposób znalezienia dwóch linii, któreby były do siebie w stosunku dwóch Równoległościannów zakończonych prostokątami mającemi boki dane.

Przykład. Mając dany Szescian i Równoległościann prostokątny, znaleźć linią taką, aby stosunek Szescianu do Równoległościannu równy był stosunkowi boku Szescianu do tej linii.

Niech będzie S bok Szescianu, P, Q, R , boki trzy Równoległościannu. Zamieńmy naprzód Prostokąt, którego bokami są P , i Q , na inny, któryby miał za bok jeden, bok Szescianu: to jest, szukamy czwartej proporcjonalnej do S, P , i Q ; Niech będzie L , tą czwartą proporcjonalną. Równoległościann dany, równy będzie inszemu, któryby miał za boki: S, L, R : a zatem stosunek Szescianu do Równoległościannu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do Prostokąta $L \times R$. Zamieńmy znówu ten drugi Równoległościann równy danemu, na inny, któryby znówu miał S za bok jeden, to jest szukamy czwartej proporcjonalnej do S, L , i R . Niech będzie M , tą czwartą proporcjonalną: Równoległościann drugi, a zatem i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M ;
więc

O Równoległościach prostokąt: 85

więc stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, to jest stosunkowi S , do M .

Aby tedy znaleźć w liniach, stosunek Sześcianu do Równoległościanu, prostokątnego, trzeba 1^o do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartej proporcjonalnej; 2^o trzeba znowu do tegoż boku Sześcianu, do boku trzeciego Równoległościanu, i do czwartej proporcjonalnej dopiero znalezionej, szukać inszej czwartej proporcjonalnej: a stosunek boku Sześcianu, do tej ostatniej linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Idzie zatem, że jeżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniach ich stosunek, szukając w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu: wzięwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniach, tych dwóch Równoległościanów.

61. Uwaga. Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo między Jeometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce, o przyrówny-

wynywaniu liczebnem Równoległości-
nów.

Przykt. Niech iednoś wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawierają ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby np. 5, 7, i 9. Czwarta proporcjonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwszych boków Równoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, toiest zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcjonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwszej czwartej proporcjonalnej, wyrazi liczba 315; toiest zawierać ta będzie bok sześcianu, razy 315. A zatem Równoległością, zawierać będzie w sobie Sześciąn razy 315; toiest, wzięwszy Sześciąn za iednoś albo spólną miarę; ten Równoległościąn wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5, 7, i 9.

62: *Defin.* Gdy cztery takie mamy linie, że stósunki, pierwszej do drugiej, drugiej do trzeciej, trzeciej do czwartej są równe o takich liniach mówi się, że są ciągło (continue) proporcjonalne.

Przy-

O Równoległościach prostokąt: 87

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1, 2, 4, 8; nazywają się ciągiem proporcjonalnymi, a cztery linie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby, nazywałyby się też ciągiem proporcjonalnymi. Toż mówić o liczbach, 8, 12, 18, 27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzającą jeden raz i pół, i t. d.

Stosunek pierwszy z tych linii, do czwartej, składa się z stosunku, pierwszej do drugiej, drugiej do trzeciej i trzeciej do czwartej (a to przez definicyą stosunku składanego). Że zaś wszystkie te szczególne stosunki są równe, więc stosunek pierwszy tej linii do czwartej, składa się z 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *trójmnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta linia do czwartej, będzie w stosunku trójmnożnym pierwszej do drugiej.

63. *Przystosowanie.* Niechby Równoległością, który wymierzać mamy przez Sześciąt wzięty za jedność, był i on sam Sześciąt.

Niech będzie AB bok Sześciątu mającego służyć za miarę; AC bok Sześciątu który wymierzyć mamy. Szukamy do AB, i AC, trzeciej proporcjonalnej AE (kreśląc Trójkąt prostokątny ABC, mający AB za jedno ramię kąta prostego, a AC za przeciwprostokątną; i wystawiając do

Taf. II.
Fig. 7.

do linii AC, w punkcie C, prostopadłą CE, aż do ięć spotkania się w E, z linią AB przedłużoną.) Szukamy dalej do AB, AC, AE, czwartę proporcjonalną AF (wyprowadzając od punktu E linią AE, prostopadłą EF, aż do ięć spotkania się w punkcie F z linią AC przedłużoną.) Pierwszy Sześciąt, wzięty za miarę, tak się będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypadą, iak linią AB, do linii AF, toiest: iak linią pierwszą do czwartę z linii ciągle proporcjonalnych: z których pierwszych dwóch jedna iest bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia: a zatem stósunek pierwszego Sześcianu do drugiego iest trójmnożnym stósunku ich boków,

I tak ieżeli bok Sześcianu iakięgo trzy razy zawiera w sobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześciąt pierwszy będzie do drugiego, iak $3 \times 3 \times 3$ do 1. albo iak 27, do 1; toiest ieżeli linią AC zawiera w sobie trzy razy linią AB, linią też AE zawierać będzie trzy 3 linią AC, a zatem 9 razy linią AB, a linią AF zawierać będzie 3 razy linią AE: a tēm samēm 27 razy linią AB.

54. *Wzajemnie.* Gdy trzeba znaleźć Sześciąt, któryby do drugiego był w stósunku danym, i takim, któryby się równał stósunkowi boku Sześcianu tego dru-

O Równoległościach prostokąt: 89

drugiego, do linii daney; bok Sześciannu, którego szukamy, má byđz drugą linią ze czterech ciągło proporcjonalnych, między któremi pierwszą z czwartą; są w danym stosunku, toiest: bok ten szukany, má byđz linią pierwszą z dwóch średnich ciągło proporcjonalnych między pierwszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może byđz rozwiązane przez Jeometrią początkową, chyba trafunkiem przez doświadczanie i szukanie nie pewne: do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynajmnię z linii krzywych, nazwanych przecięciami konicznemi (sectiones conicæ). I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcjonalnych, pierwszym powodem byđz musiało Jeometrom, do uważania, tych linii krzywych dopiero wspomnionych, i do uczynienia pierwszego kroku w wyższej Jeometrii. Gdy się w Delos radzono Wyroczeni, coby za sposób był zjednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dađz głos słyszeć: aby dwumnożono ołtarze (duplīcentur altaria). Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleźć bok Sześciannu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spólną m arę, toiest: iż trzeba było wyznaleźć pierwszą z dwóch średnich Jeometrycznych, między dwiema liniami, z któ-

z którychby jedna dwa razy w sobie zamykała drugą.

55. W Arytmetyce; gdy stósunek dany, jest stósunkiem liczby jednej Szesciennej, do drugiej także Szesciennej, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak n. p. gdyby dwa Szesciany miały być do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1. do 27, albo iak 8. do 27. i t. d. boki ich byłyby jeden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2. do 3. i t. d.

Ale gdy stósunek dany, nie jest stósunkiem dwóch liczb Szesciennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Szescian jeden, ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wzięwszy bok tego drugiego, za jedność, bok pierwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, której Szescianem, jest 2: a zatem pierwiastek Szescienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiastek zaś ten przybliżony, jest 1, 26 to jest bok mniejszego Szescianu, tak by się miał do boku Szescianu dwa razy tak wielkiego, iak 1. do 126, albo iak 100, do 126. albo jeszcze dokładniej iak 23, do 29.

56. Uwaga. Gdy stósunek dwóch linii jest dany; dany jest tem samem i stósunek ich Szescianów.

Tak

O Równoległościach prostokąt: 91

Tak albowiem mieć się będą do siebie te Sześciiany, iak linia pierwsza do czwartej ciągle proporcjonalnej, wzięwszy za pierwsze dwa wyrazy tej proporcji dwie linie, których stosunek jest dany.

Skąd wypada wniosek następujący:

67. Gdy cztery linie są w proporcji, ich Sześciiany w proporcji też będą, to jest: gdy stosunek dwóch pierwszych linii równa się stosunkowi dwóch drugich; stosunek też Sześcianów z dwóch pierwszych linii, równać się będzie stosunkowi Sześcianów z dwóch drugich linii.

W Arytmetyce: sztery liczy: 2, 3, 8, 12
składają proporcją

ich Sześciiany: 8, 27, 512, 1728,
składają także proporcją.

68. Uwaga. Podanie zamknięte w tym wnioskku, jest tylko wyszczególnieniem podania następującego:

Niech będą trzy iakiékolwiek proporcje, i cztery takie Równoległościanny prostokątne; aby krawędzie pierwszego Równoległościannu, były trzema poprzednikami trzech pierwszych stosunków, krawędzie drugiego, trzema, następnikami tychże trzech pierwszych stosun-

sunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich stosunków, a krawędzie czwartego, trzema następnikami tychże trzech drugich stosunków: stosunek pierwszych dwóch Równoległoscianów, równy będzie stosunkowi dwóch ostatnich.

Trzeba naprzód to podanie objaśnić na przykładach liczebnych.

W ogólności zaś niech będą trzy jakiekolwiek proporcye: $A : B = C : D$.

$$a : b = c : d.$$

$$a : b = c : d.$$

Zamieńmy stosunek A do B na inszy b do czwartej linii E : Zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inszy d , do czwartej linii e .

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległoscianu równe prostokątóm $B \times b$, i, $D \times d$, a zatem podstawy dwóch pierwszych Równoległoscianów będą się miały do siebie iak a do E , a podstawy zaś dwóch drugich Równoległoscianów będą się miały do siebie iak c do e .

O Równoległościach prostokąt: 93

A że przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki; A do B, b do E, C do D, d do e, są wszystkie równe,

więc $b: E = d: e$.

Ze zaś $a: b = c: d$

więc $a: E = c: e$.

A zatem stosunek podstaw Równoległościów dwóch pierwszych, równy jest stosunkowi Równoległościów dwóch drugich.

Jeśli też z przypuszczenia;

$$a: b = c: d$$

więc Prostokąty aa, Eb cc, ed składają proporcją; a zatem cztery Równoległości; któreby te Prostokąty miały za podstawy, i z których dwa pierwsze miałyby spólną wysokość A, dwa zaś drugie wysokość C, byłyby także z sobą w proporcji. A że pierwszy z tych Równoległościów miałby za krawędzie trzy linie: A, a, a, drugi zaś równałby się temu, któryby miał za krawędzie trzy linie: B, b, b: a to dla tego, że są równe Prostokąty: $(B \times b \text{ i } A \times E)$ trzeci z tych Równoległościów miałby za krawędzie, trzy linie: C, c, c, a czwarty równałby się temu, któryby miał za krawędzie, trzy linie: D, d, d; więc te cztery Równoległości byłyby w proporcji.

ROZ-

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. *Defin.* Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległymi, nazywa się *Równoległościanem*; a zatem Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziele poprzedzającym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz. I.* W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przyrastać do siebie.

Táb. III. Niech będzie Równoległościan
Fig. 1. $ABCDEFGH$: wszystkie jego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne n. p. $ABCD$, $EFGH$ mogą do siebie przyrastać.

Dowódz: Ponieważ płaszczyzny równoodległe $ABCD$, $GHFE$, są przecięte trzecią płaszczyzną $BGFC$; więc ich wspólne przecięcia BC , FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Takż pokazać można, że linie HE , GF są równoodległe, i linie HG , EF równoodległe, a zatem że ściana $HGFE$ jest Równoległobokiem.
Podo-

O Równoległościach nie prostokąt: 95

Podobnie i wszystkie insze ściany są także Równoległobokami.

W szczególności zaś, linie: BA, GH, i linie BC, GF, są od siebie równoodległymi; więc równe są kąty ABC, HGF. A że te linie BA, GF, i BC, GH są równe; więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przyśtać do siebie. Toż mówić o każdej inszej parze ścian przeciwnych.

71. Stąd też wystawić sobie można każdy Równoległociąg, iakoby utworzył się następującym sposobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok, a od iednego z jego wierzchołków wyciągniemy linią czyniącą z jego płaszczyzną, kąt iakikolwiek: wyciągniemy potem i przez drugie wierzchołki, linie równoodległe od pierwszej, i zrobmy wszystkie sobie równymi. Niech na koniec ten Równoległobok posuwać się równoodległe od pierwszego swego położenia, i niech wierzchołki jego nie schodzą nigdy z linii równoodległych, miejsce od Równoległoboku, tym sposobem przebyte, będzie Równoległociągiem.

72. Twierdź: 2. Dwa Równoległociąg mogą przyśtać do siebie, gdy i wszystkie ich odpowiadające sobie ściany

ny przystać do siebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także sobie odpowiadające, robią się z kątów równych należących do tychże ścian.

Táb. III.
Fig. 1.
i 2.

Niech będą dwa Równoległościany: AF , af , których wszystkie ściany odpowiadające sobie w jednym i w drugim Równoległościannie, mogą przystać do siebie, i których kąty bryłowe także sobie odpowiadające n.p. A , i a , robią się z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

Dowód: Ponieważ kąty bryłowe, A , i a , robią się z równych względem siebie kątów płaskich; więc przystać do siebie mogą. Przeniósłszy tedy Równoległościannę af , tak aby kąt bryłowy a , przystał wrzeczy samej do kąta bryłowego A : ponieważ i kąty płaskie, z których się te bryłowe robią, przystają iedne do drugich sobie równych, a linie ab , ad , ah , są równe względem linii AB , AD , AH ; więc punkta: b , d , h , przystaną do punktów: B , D , H , i ściany także czyniące dwa kąty bryłowe a , i A , przystaną iedne do drugich: a zatem i punkta: c , g , e , przystaną do punktów odpowiadających sobie: C , G , E , a w szczególności linie: bc , bg , przystaną do linii: BC , BG . Więc i płaszczyzna przechodząca przez linie: bc , bg , leżeć będzie

O Równoległościanach nie prostokąt: 97

dzie na płaszczyźnie przechodzący przez linie BC, BG. Ze zaś przypuściliśmy, iż ściana bcfg, przystać może do ściany BCFG; więc punkt f, przystanie do punktu F.

Tymże sposobem okazać można, że i wszystkie insze ściany, i kąty Równoległościanu af, przeniesionego, przystaną do inszych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatem te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

73. Uwaga. Tymże całe sposobem dowodzi się, że dwie jakiekolwiek Bryły, przystać mogą do siebie, gdy wszystkie kąty ich bryłowe odpowiadające sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przystać mogą do ścian odpowiadających w drugiej Bryle.

73. Definicje. Uważając Równoległościan iakoby zbudowany na iedney ze ścian swoich, ta ściana nazywa się *podstawą* iego; a prostopadła od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, do téj spuszczoną, nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podstawy, są do nięj prostopadłemi, taki Równoległościan nazywa się *prostym* (Parallelipedum rectum) Równoległościany prostokątne, są gatunkiem Ró-
C wno-

wyoległościaków prostych, w których podstawa nawet sama jest prostokątem.

75. Twierdź: 3. Dwa Równoległościaki równe są w brylowatości (soliditas) gdy mają jednakową wysokość, i na téż samy są zbudowane podstawie, i gdy dwie ich ściany, na iedney płaszczyźnie znajdujące się, stoia na tymże samym boku podstawy.

Tab. III.
Fig. 3.

Niech będą dwa Równoległościaki: $ACGE$, i $ACLI$ iednakięj wysokości zbudowane na téż samy podstawie AC ; i niesi dwie ich ściany, AG , AL , wspierające się na tymże samym boku AB podstawy, znajduia się na téż samy płaszczyźnie: te dwa Równoległościaki, są równe w brylowatości.

Dowodz: Dwie Bryły: $ADIEHM$, $BCKEGL$, mają takie wszystkie ściany odpowiadające sobie, iż iedne do drugich przytać mogą; wszystkie podobnie kąty ich brylowe przytać mogą do siebie. Jakoż Trójkąt HAM , może przytać do Trójkąta GBL , a w szczególności kąty HAM , GBL , są równe. Równoległobok $HADE$ przytać może do Równoległoboku: $GBCF$ sobie przeciwnego, w pierwszym Równoległościanie, a w szczególności kąty: HAD , GBC , są równe: Równoległoboki także: $MADI$, $LBCK$ przeciwnie sobie, w drugim Równoległościanie.

O Równoległościach nie prostokąt: 99

wnoległościanie, mogą do siebie przy-
 stać, a w szczególności kąty: MAD,
 LBC, są równe; więc kąty bryłowe A,
 B, i ściany tych kątów mogą przystać
 do siebie. Toż mówić i o wszystkich
 innych kątach bryłowych, i o wszyst-
 kich innych, tych dwóch brył, ścianach.
 Zaczem te dwie bryły przystać mogą
 do siebie, i są równe sobie w bryłowa-
 tości. A że od całej bryły ACLE odia-
 wszy pierwszą z brył wyżej wyrażo-
 nych, ADIEHM, zostało się Równoległo-
 ścią ACLI, a odiawszy od téż samej
 bryły ACLE, drugą bryłę BCKFGL, zo-
 stało się Równoległością ACGE, więc
 te dwa Równoległości są równe. (f)

76. Twierdż. 4. Dwa Równoległości-
 ny są równe w bryłowości, gdy jedna-
 ką mają wysokość, i na téż samej są
 zbudowane podstawie, chociaż żadna
 z jch ścian stojących na bokach podstawy;
 nie będzie na téż samej płaszczyźnie.

Niech będą dwa Równoległości: Tab. III.
 ACGE, i ACLI, na téż samej podstawie Fig. 4.
 AC, z jednaką wysokością; i niech żadna
 Gz z jch

(f) To dowodzenie jest ogólne, i roz-
 ciąga się do iakiegokolwiek położenia linii
 MI; czyliby punkt M przypadał na punkt
 G, czyliby się znajdował między G i H, czy-
 li na koniec byłby na linii HG przedłużony.

z jch dwóch ścian wspierających się na tymże samym boku podstaw, nie znayduie się na téżże saméj płaszczyźnie położoną; te dwa Równoległosciany są równe.

Dowódz: Przedłużmy linie KI, HE, tak daleko, aż się zniydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i linia LM, przedłużoną, przecina HE, w N; a linia GF także przedłużoną niech przecina IK w P, i niech Q, będzie punktem przecięcia linii GF, LM; albo ich przedłużeń.

Pociągniemy linie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległoscianném, czego bardzo łatwo dowieśdź można.

Równoległoscián ACQO, má tę samę co tamté dwa, podstawę AC.

Má ścianę AO na płaszczyźnie ściany AE, należący do Równoległosciannu, ACGE; więc tému Równoległosciannowi będzie równy.

Má zaś oprócz tego ścianę AQ na płaszczyźnie ściany AL, należący do Równoległosciannu ACLI; więc będzie równy i tému drugiemu Równoległosciannowi.

Więc

O Równoległościach nie prostokat: 101

Więc Równoległością $ACQO$, równy jest tak Równoległością $ACGE$, iako i Równoległością $ACLI$; a zatem i te dwa Równoległością są też sobie równe.

77. *Twierdź: 5.* Dwa Równoległością są równe, gdy iednaką mają wysokość i równe podstawy, z jednym spólnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże samym boku spólnym wystawione, znajdują się na téż samę płaszczyźnie.

Niech będą dwa Równoległością: Táb. III. $ACGE$, $ICOQ$ iednakię wysokości; a *Fig. 5.* podstawy ich równe AC , IC , niech mają bok spólny CD , na którym wystawione są dwie ściany DF , DP na téż samę płaszczyźnie znajdujące się te dwa Równoległością są równe.

Wykreśl: Przez punkta I , i L , poprowadźmy na płaszczyźnie AG , czyli AO , linie JN , LM , równoodległe od AH , albo BG , i niech te równoodległe spotykają w N i M . linią HO . Pociągniemy i linie EN , FM . Bryła $JCME$ będzie też Równoległością.

Dowód: Równoległością $ICME$, má też samę podstawę JC , i tę samę wysokość, co i Równoległością $JCOQ$, a zatem są sobie równe.

Tén-

Tenże Równoległością JCME, i Równoległością ACGE, uważając, w nich ścianę wspólną DF, iak podstawę, mają też iednaką wysokość, a zatem są sobie równe. Więc Równoległością JCME, równy jest tak iednemu, iak i drugiemu Równoległością ACGE, i JCOQ, a zatem i te dwa Równoległością są równe.

Táb. III. 78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległością
Fig. 5. ny są równe, gdy mają iednaką wysokość,
i gdy ich podstawy mające bok ieden wspólny, są równe.

Niech we dwóch Równoległościąch iednakię wysokość będą dwie podstawy: AC, i IC równe, i mające wspólny bok CD; te dwa Równoległością będą równe.

Wykręśl: Na podstawie IC, iednego z tych Równoległościąch, który nazwiemy pierwszym, postawmy trzeci Równoległością tenże samę wysokość, tak, aby ściana iego stoiąca na boku CD, znajdowała się na płaszczyźnie ściany drugiego Równoległością, stoiący na tymże boku;

Ten trzeci Równoległością, iako mający z pierwszym wspólną podstawę i wysokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległością, będzie równy, i drugiemu: bo mają równe podstawy: IC,
AC,

O Równoległościach, nie prostokąt: 103

AC, ze spólnym bokiem CD, i ściany ich stojące na boku CD, znajdują się na téjże samej płaszczyźnie.

Więc ten trzeci Równoległością równy jest tak pierwszemu iak i drugiemu, a zatem i one sobie równe będą.

W szczególności. Równoległością każdy równy jest Równoległościąnowi prostokątnemu, który má tę samę, co i tamten wysokość, podstawę równą podstawie iego, i bok ieden spólny obu dwóm podstawóm.

79. Skąd wynika, że cokolwiek się powiedziało o Równoległościach prostokątnych; wszystko to do iakichkolwiek inszych można przytósować; kładąc zamiast każdego z nich Równoległością prostokątny, téżże samej wysokości, i podstawy równej, a mającej bok ieden spólny z podstawami Równoległościąnow nie prostokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościąny, mające równe podstawy i wysokości, są równe: bo Równoległościąny prostokątne iednakiej wysokości, i mające z tamtými Równoległościąnami równe podstawy, a w nich spólny bok ieden, są równe.

2. Dwa Równoległościąny są téż równe, których podstawy są w stosunku odwrotnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległosciany, których bryłowości są równe, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Wszystko to, co się powiedziało o zamienianiu stosunku dwóch Równoległoscianów prostokątnych, na stosunek dwóch linii; i o mierze liczebnej dwóch Równoległoscianów prostokątnych, przy stosować można do miary Równoległoscianów nie prostokątnych; kładąc zamiast trzech boków, Równoległoscianów prostokątnych, bok jeden podstawy Równoległoscianu nie prostokątnego, wysokość tej podstawy względem tego boku, i wysokość Równoległoscianu względem tej podstawy.

80. *Prześtroga.* Gdyby ściśle i prawdziwie Geometryczne dowodzenie wyżej położone przytrudnem się zdawało Ucznióm do pojęcia, mimo wystawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiej do pojęcia podać w sposób następujący.

Niechaj dwa Równoległosciany z równemi podstawami, i wysokościami stoją na téjże samej płaszczyźnie. Niech insza iakąkolwiek płaszczyzna równoległa od pierwszej, przecina te dwa Równoległosciany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podstawóm, a
zatem

O Równoległościach nie prostokąt: 105

zatem i sobie równe będą: i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przecniemy przez płaszczyznę równoodległą od ich podstaw; równe zawsze będą te przecięcia. Żadney więc nie masz przyczyny, dla którejby jeden z tych Równoległościanów nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu jednak ostrzedz zaraz Uczniów, iż tym sposobem, słabo się w rzeczy samey dowodzi równość dwóch Równoległościanów. Bo chociażby iak náywięcej było tych przecięć równoodległych od podstaw Równoległościanów; toieft: chociażby iak náy mnieyszą była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego náybliższego; wszelako części Równoległościanów zawarte między takimi dwoma przecięciami, są ieszcze Równoległościanami, które tak się względem siebie mają, iak się mają całe Równoległościany, których tamte są częściami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanów, z równości ich części; trzebaby pierwey dowieśdź równości tych części.

Może się imainacyá nasza tak daleko zapuścić, że przez nią wyftawimy sobie dwóch Równoległościanów przecięcia, tak blizkie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą się zdawać nie różnić od podstaw tychże

Ró-

Równoległoscianów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem, że małość lub wielkość jakiejś rzeczy, nie jest w sobie małością lub wielkością, ale się albo za małość bierze względem in-szej rzeczy, większey, albo za wielkość, względem in-szej mniejszey; i nie można nigdy bryły choćby też najcięższey za jedno brać z powierzchniami, które ją kończą. Prawda to jest, że jeżeli większą będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległoscianów przez płaszczyzny równoodległe od ich podstaw; tedy też mniejszą będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema najbliższymi płaszczyznami, czyli przecięciami: ale znowu, jeżeli iakąkolwiek jest choćby też najmniejszą, ta różnica; tedy wielokroć powtórzoną może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległoscianach, których równości chcemy dowodzić, z równości ich części, czyli z małych Równoległoscianów, z których się składają.

Ta sama trudność do rozwiązania zostaje, gdyby kto równości dwóch Równoległoscianów mających jednaką podstawę i wysokość, a z których jeden byłby n. p. prosty, a drugi nie chciał dowodzić z podnoszenia się w górę ich podstaw w równey zawsze od pierwszego położenia, odległości; ponieważ pier-
wéy-

węby dowieść trzeba, że miejsca od podstaw przebyte, nie podług tej drogibrane bydz powinny, którą w samey rzeczy punkt każdy tych podstaw przebył; (bo do iednakiey wysokości postępując, więcey miejsca przejdzie punkt n. p. skrajny Równoległościann ukośnego, niż tego, który iest prosty) ale to miejsce od podstaw Równoległościann przebyte, powinno się wymierzać wzdłuż linii, prostopadłej do téż podstawy, ponieważ ta tylko linią mierzy odległość; w której podstawa podnoszeniem się swoim oddaliła się od pierwszego swego położenia.

Następujące porównywanie może iakożkolwiek służyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znosi wcale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na téż samey podstawie, i z równą wysokością, przetniemy linią równoodległą od podstawy, obadwa przecięcia równe będą podstawie. Wszystkie téż insze takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w jednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i o dwóch Trójkątach, których przecięcia równoodległe od podstawy wspólne, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Trójkąty nie

mia-

miałyby sobie być równe? Ponieważ tedy tym sposobem dochodzimy względem powierzchni płaskich, tej samej prawdy, której doszliśmy ściśłem pierwey dowodzeniemy; już ten sam skutek, powinién nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatem przytósować go i do brył dla téż przyczyny.

Obiaśni się to iasnie i potém, gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie. 7.* W jakimkolwiek Równoległoscianie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iednę ze ścian jego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległoscianu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiemy, i podzieli Równoległoscian na dwie części, które przyśtać do siebie mogą.

Táb. III.
Fig. 1.

Niech będzie Równoległoscian: $ACGE$; przez krawędź AH , i przez przekątną HF niech przechodzi płaszczyzna; linie AH , CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH , HF , przechodzi téż i przez CF . Że zaś linie: AH , CF są równe, i równoodległe; więc Czworokąt $ACFH$, jest oraz i Równoległobokiemy.

Dwie Bryły: $ABCEFGH$, $FEHACD$, mogą przyśtać do siebie. 11

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Równoległoboczne* (*Parallelogrammicæ*) są ścianami przeciwnemi w *Równoległościanie*; ściany zaś ich *Trójkątne* iak n.p. *ABC*, *HEF*, mają równe boki iedne względem drugich.

2. Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przyśtać iedne do drugich; n.p. kąt bryłowy w *A* iedney *Bryły*, robi się ze trzech kątów płaskich: *CAB*, *BAH*, *HAC*, które równe są względem kątów *EFH*, *EFC*, *HFC*, z których się robi kąt bryłowy w *F*, drugiey *bryły*.

Więc té dwie bryły mogą przyśtać do siebie, a w szczególności są sobie równe.

ROZDZIAŁ V.

O Graniastorupach.

82. **T**wierdzenie przybrane. Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach: niech ieszcze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są *Równoległobokami*.

Do-

Dowódz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe: a zatem i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie bryła iaką zakończoną dwiema Figurami prostokréślnemi, równemi, podobnemi i równoodległemi a mającemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Równoległobokami mającemi za boki; boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur má boków, ta bryła nazywá się *Graniastółpém*, (*Prisma*). I tak Równoległosciany, o których w poprzedzających Rozdziałach mówiliśmy, są pewnemi Graniastółpów gatunkami. Jedną z tych Figur równych i równoodległych, na które wysławiamy sobie, iakoby zbudowany Graniastółp nazywá się jego *podstawą*, a prostopadła spuszczone na tę podstawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwnej nazywá się *wysokością* tego Graniastółpa. Graniastółp albo iest *prosty*, albo *ukosny*; *prosty*, gdy ściany jego stoją do pionu względem podstawy; *ukosny*, gdy też ściany są do podstawy nachylone.

Różne także nazwiska przybierá Graniastółp, podług rozmaitey liczby boków podstawy swojej, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywá się *trojkątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześcio-*

szesciokątnym, gdy podstawa jego jest Trójkątem, Czworokątem, Pięciokątem, Szesciokątem i t. d.

84. *Twierdź*: 1. Przeciąwszy gdziekolwiek Graniastopę płaszczyzną równoodległą od jego Podstawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podstawie.

Dowód: Przecięcie iednéy któreykolwiek ściany poboczney, przez tę płaszczyznę, równoodległąm będzie od tego boku podstawy, na którym ta ściana stoi; i te dwie linie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa insze boki ma części dwóch inszych boków téżże ściany, zawarte między podstawą i płaszczyzną przecinającą; więc te dwie linie będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaszczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków sobie przeciwnych, należących do podstawy, a zatem kąt, który te wspólne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podstawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniastopa przez tę płaszczyznę, wszystkie swoje boki i wszystkie kąty równe względem boków i kątów podstawy Graniastopa, i dla tego przecięcie to przytać może do podstawy.

85. Można sobie wystawić Graniastołup, iakoby zrobiony przez posuwanie się w górę tego podstawy, w sposób następujący:

Niech będzie Figura iaką prostokreślną, odrysowaną na płaszczyźnie. Od wierzchołku kąta któregokolwiek tej Figury, wyciągniemy linią prostą, czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potem wznosi do góry ta Figura, w równy zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nie schodzi z linii od niego wyprowadzonej; Bryła która się takim ruchem utworzy, będzie Graniastołupem.

86. *Twierdź. 2.* Graniastołup trójkątny, jest połową Równoległoscianu tęż samy co on wysokości, któryby za podstawę miał Równoległobok z dwoma bokami, i kątem zawartym, równaiącemi się dwóm bokóm podstawy tego Graniastołupa, i kątowi między niemi zawartemu.

Niech będzie Graniastołup trójkątny ABCDEF, którego podstawą jest Trójkąt ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami są AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległoscianu ACEH, któryby miał spólne dwie ściany AE, i BD z Graniastołupem trójkątnym.

Dwa

Dwa Graniałtołłupy Tróykątne: ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przyłłać, bo są dwiema częłłściami oddzielone-
ni przez płaszczyznę przekątną ACDF;
a zatem ieden z nich, n p. Graniałtołłup
ABCDEF, iest połową Równoległółścianu
ACEH.

87. *Wniosek.* Cokółwiek się powie-
dziąło o Równoległółścianach względem ich
wielkółci; włłzyłłto to przystółsować mó-
żną do Graniałtołłupów tróykątnych,
które tych Równoległółścianów są poło-
wami.

1. Dwa Graniałtołłupy tróykątne, ró-
wnéy wysokółci i podstawy, równaią się
i w bryłwatółci.

2. Dwa Graniałtołłupy tróykątne, któ-
rych podstawy są równé, maią się do sie-
bie, iak ich wysokółci.

3. Dwa Graniałtołłupy tróykątne ie-
dnakiéy wysokółci, maią się do siebie iak
ich podstawy.

4. Dwa Graniałtołłupy tróykątne,
których podstawy są w łłóśunku odwro-
tnym ich wysokółci, równaią się sobie
w bryłwatółci.

5. Dwa Graniałtołłupy tróykątne, ró-
wné w bryłwatółci, maią podstawy w łłó-
sunku odwrotnym ich wysokółci.

H. 6.

6. Co się powiedziało o porównywaniu dwóch Równoległościanów, to twierdzić można i o porównywaniu dwóch Graniaściosłupów trójkątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podstawy Graniaściosłupa trójkątnego, przez liczbę, znaczącą wielkość jego wysokości.

7. Mając wiadomą podstawę Graniaściosłupa trójkątnego, i kąty dwóch ścian jego, które z kątem podstawy czynią jeden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaściosłup trójkątny, i jego wysokość, a zatem i bryłowość tymże samym sposobem, jak się czyniło względem Równoległościanów.

8. Graniaściosłupy trójkątne, mające spólny kąt ieden bryłowy, są do siebie jak Równoległościany prostokątne, mające te same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, jak liczby trzy ciągiło iedną przez drugą rozmnożone; wyrażające wielkość tych trzech krawędzi.

88. Twierdz: 3. Graniaściosłup nie trójkątny może być rozłożony na Graniaściosłupy trójkątne téżże co on wysokości; za podstawy zaś mające Trójkąty, na które rozdzielona jest jego podstawa przez tyle przekątnych ciągnio-

O Graniałostupach. 115

gnionych od iednego téy podstawy
wierzchołka do innych, ile ich popro-
wadzić można.

Niech będzie ABCDE, podstawa n p.
pięciokątna Graniałostupa ABCDE edcba. Táb. IV.
Od téy wierzchołka n p. A poprowadź- Fig. 2.
my przekątné: AD, AC, te rozdziela
Podstawę na trzy Trójkąty: AED, ADC,
ACB. Na ścianie przeciwnéy podstawie,
od punktu a, odpowiadającego punkto-
wi A, poprowadźmy przekątné: ad, ac.

Linie Aa, Dd, są obiedwie równood-
ległe od linii Ee, i oney równé; więc i
względem siebie będą równoodległemi i
równemi; a przeto Czworokąt ADda,
jest Równoległobokiém, a zatem Bryła
ADE eda, jest Graniałostupém trójką-
tnym. Tymże sposobem okazuje się, że
i Bryły: ACD dca, ACB bca, są Graniałostu-
pami trójkątnemi.

89. Twierdż. 4. Dwa iakiekolwiek
Graniałostupy mające równą wysokość,
tak się do siebie mają, iak ich podstawy.
Jakoż Graniałostupy ADE eda, ADC
cda, ACB bca, i t. d. mają się do siebie iak
ich podstawy; ADE, ACD, ABC; więc
ieden z nich, n p. Graniałostup: ADE eda,
tak się ma do summy wszystkich, to-
jest, do Graniałostupa pięciokątnego,
iak podstawa trójkątna pierwszego, do

H2 sum-

summy podstaw wszystkich, to jest do podstawy Graniastołupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniastołup jednakiej wysokości; takby się miał do Graniastołupa trójkątnego: ADE eda, iak podstawą jego do podstawy trójkątnej ADE.

Więc (złożywszy stosunki) będzie stosunek iakiegokolwiek Graniastołupa do Graniastołupa ABCDE edcba, równy stosunkowi podstawy pierwszego Graniastołupa, do podstawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwóch Graniastołupów są równe.)

W szczególności, zaś, gdy Równoległością i Graniastołup iakikolwiek równe mieć będą podstawy i wysokości; bryłowatość jednego, równa będzie bryłowatości drugiego.

A zatem cokolwiek się o Równoległościach powiedziało; można to i do Graniastołupów iakikolwiek przystosować, co do wielkości ich; ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniastołupów przystosować wnioski, co do Graniastołupów trójkątnych, w szczególności, które po Twierdzeniu 2gim tego o Rozdziału następują.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostrostupach.

90. *Defin:* Niech punkt iaki znaydu-
ie się nad płaszczyzną Figury
iakięykolwiek prostokrésłney; przez ten
punkt i przez wszystkie boki Figury,
niecháy przechodzą płaszczyzny; zrobi
się stąd Bryła kończąca się z jednéy stro-
ny na téy Figurze, a z innych stron, na
tylu Trójkątach mających spólny wierz-
chołek w owym punkcie, ile ta Figura
má boków. Bryła ta nazywá się *Ostro-
stupem* (Pyramis.) powierzchnią Ostro-
stupa można sobie wystawić iakoby zro-
bioną ruchem nici przywiązanej iednym
końcem do punktu znaydującego się nad
płaszczyzną Figury, a drugim końcem
wyciągniętym obracającej się około ob-
wodu téżże Figury. Figura prostokré-
ślna, której boki służą za podstawy
Trójkątów kończących Ostrostup, nazy-
wá się *podstawą* ostrostupa, te Trójką-
ty nazywają się jego *ścianami*; punkt
który jest wierzchołkiem spólnym wszyst-
kich ścian Ostrostupa, nazywá się *wierz-
chołkiem* jego. Prostopadłą spuszczoną
od tego wierzchołka, na płaszczyznę
podstawy, zowie się *wysokością* Ostro-
stupa.

Ostrostup różne przybiera nazwiska,
podług wielości boków podstawy swo-
iej.

iey. Nazywá się trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa jego iest Trójkątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą iest Figura prostokreślná mogącą się na kole opisać; i gdy prostopadłej spuszczonej od wierzchołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakową, i tych ścian płaszczyzny równie są nachylone do płaszczyzny podstawy.

W Ostrosłupie, którego podstawą iest Figura prostokreślná mogącą się wpisać w koło, a którego wysokość wychodzi od środka tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatem wszystkie te ściany są Trójkątami równoramiennymi. Ale że środek koła opisanego na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego, takowego Ostrosłupa nie można nazywać *prostym*.

Żeby iednak nazwifko to Ostrosłupa prostego (pospolicie do tych czas nie dostatecznie określone) ogólniejszem uczynić, przydamy następujący warunek.

Gdy

Gdy w Figurze prostokręślnéj znajdzie się taki punkt, przez który ciągnięte linie, a po obu dwóch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywa się *środkiem* Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, jest tego Równoległoboku *środkiem*. Jeżeli tedy Figura prostokręślna mająca taki *środek*, służy za podstawę Ostrosłupowi, i jeżeli prostopadła od wierzchołka jego spuszczone przypadą na ten *środek* Figury, taki Ostrosłup nazwiemy także *prostym*.

Ostrosłup prosty nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokręślną foremną.

91. *Twierdż: I.* Przeciawszy Ostrosłup płaszczyzną równoodległą od podstawy jego; przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup $SABCDE$, mający wierzchołek w punkcie S , a którego podstawą jest Figura prostokręślna $ABCDE$. Niech ten Ostrosłup przecina płaszczyzna równoodległa od podstawy, przecięcie to $abcde$ będzie podobne do podstawy.

Táb. IV.
Fig. 3.

Po-

Ponieważ płaszczyzna podstawy równoodległa jest od płaszczyzny przecinającej; będą też i przecięcia ścian, wspólne z temi płaszczyznami, równoodległe iedné względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia n. p. ab , bc równoodległe będą względem boków AB , BC podstawy; a zatem i wszystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, n. p. kąt abc , równy będzie kątowi ABC . Jest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Trójkąty SAB , sab są podobne; więc Sb ; $SB = ab$; AB .

Trójkąty też, Sbc , SBC podobne; więc: Sb ; $SB = bc$; BC ; a zatem ab ; $AB = bc$; BC .

Więc przecięcie i podstawa, mają około kątów względem siebie równych; boki proporcjonalne, a zatem przecięcie podobne jest do podstawy.

W szczególności zaś, przecięcie także, i podstawa, mają się do siebie w stosunku dwumnożnym boków ich, odpowiadających sobie; albo są do siebie w stosunku dwumnożnym linii n. p. Sb , SB ; albo na koniec w stosunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S , Ostrostupa, mającący się wymierzać przez prostopadłą spuszczoną od tego wierzchołka, do ich

O Piramidach albo Ostrosłupach. 121

ich płaszczyzn; tak dalece, że przeciąwszy Ostrosłup płaszczyznami równoodległymi od podstawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały się do siebie, jak liczby 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchni tych przecięciów będą do siebie jak liczby 1, 4, 9, 16, 25, i t. d. (Obacz Jeometrii Części I. Rozdz: IX.)

Uwaga. Tego Podania częste jest w Piśmie używanie; i dla tego trzeba je jak najjaśniey ucznióm wyłożyć, i o gruntownem jego zrozumieniu od nich bydź przeświadczonym.

92. *Wniosek 1.* Niech będą dwa Ostrosłupy z jednakową wysokością, i podstawami znajdującymi się na téż samej płaszczyźnie. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległymi od ich podstaw, przecięcia odpowiadające sobie, tak się mieć do siebie będą, jak podstawy tych Ostrosłupów; a w szczególności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia jednego Ostrosłupa będą równe przecięcióm odpowiadającym drugiego.

93. *Wniosek 2.* Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów mających jednaką wysokość i równe podstawy, a stojących na téż samej płaszczyźnie, iako też i o proporcjonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami

wami, gdy té przy równych wysokościach, są nie równe; można by mniemać, że téż i Ostrostupy mające równe wysokości i podstawy, są równe, i że gdy równe mają wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następujące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczymy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrostup Trójkatny przecięty płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w jednakowey od siebie odległości zstępującemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrostupa, Graniafstosłupy, z których każdy miałby wysokość równą odległości dwóch płaszczyzn najbliższych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniafstosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniafstosłupów má iedną krawędź spolną z Ostrostupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrostupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniafstosłupów (które nazwę opisanemi) od summy drugich (które nazwę wpisane) równa będzie pierwszemu Graniafstosłupowi opisanemu, który iest wystawiony na podstawie Ostrostupa.

Niech

O Piramidach albo Ostrosłupach. 123

Niech będzie Ostrosłup Trójkątny Tab. IV.
SABC, którego wierzchołek S, a podsta- Fig. 4.
wa ABC.

Podzielmy ten Ostrosłup na części
n.p. 5, płaszczyznami równoodległemi
od podstawy, i w jednakowey od siebie
odległości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$ przecięcia
Ostrosłupa, przez te płaszczyzny. Na
podstawie i na wszystkich przecięciach
Ostrosłupa wystawmy ku jego wierzchoł-
kowi Graniałostłupy, kończące się na
przecięciu nabybliższym; te będą opisa-
nemi na Ostrosłupie, bo ich ściany wy-
stępować będą za ściany Ostrosłupa. Wy-
stawmy znowu na tychże przecięciach ku
podstawie, inne Graniałostłupy tęż same
co pierwsze wysokości; te będą wpi-
sanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich,
będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Ró-
żnica między summą pierwszych i dru-
gich Graniałostłupów, równać się bę-
dzie Graniałostłupowi opisanemu, wy-
stawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy linie AB, AC,
na 5 równych części, w punktach: $b^1, b^2,$
 $b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4$. i pociągniemy linie;
 $b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4$.

Trójkąty: $Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3,$
 Ab^4c^4 , będą równe względem Ostrosłupa
przecięciów: $A^1B^1C^1, A^2B^2C^2, A^3B^3C^3,$
 $A^4B^4C^4$. Ró-

Różnica między Graniafstosłupém opisany, a stojącym na podstawie ABC, i między Graniafstosłupém wpisanym a stojącym na podstawie $A^1B^1C^1$ równa się Graniafstosłupowi téżże saméy co tamté wysokości, mającemu za podstawę; różnicę tamtych dwóch podstaw, toieft Czworokąt BCc^1b^1 .

Podobnie i różnica między Graniafstosłupém opisany, a stojącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniafstosłupém wpisanym a stojącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa się Graniafstosłupowi, téżże saméy co oné wysokości, mającemu za podstawę; różnicę tamtych dwóch podstaw, toieft Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnicę dwóch pár Graniafstosłupów następujących, równe są Graniafstosłupóm, téżże co oné wysokości mającym za podstawy Czworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3b^4c^4$.

Ostatni zaś Graniafstosłup opisany, równa się Graniafstosłupowi, téżże co on wysokości mającemu za podstawę Trójkąt Ab^4c^4 .

Różnica tedy między summą wszystkich Graniafstosłupów opisanych, a summą wszystkich Graniafstosłupów wpisanych, równa będzie summie wszystkich Graniafstosłupów téżże co one wysokości, któreby stały

O Piramidach albo Ostrośłupach. 125

stały na Czworokątach $BC\ c'b'$, $b'c'c^2b^2$, $b^2\ c^2\ c^3b^3$, $b^3\ c^3\ c^4b^4$, i na Trójkacie Ab^4c^4 , to jest: równa będzie Graniaśłupowi trójkątnemu téżże co oné wysokości, a mającemu za podstawę Trójkąt ABC . Ta więc różnica równa się w saméy rzeczy pierwszemu Graniaśłupowi opisanému.

95. *Wniosek.* Pierwszy tén Graniaśłup opisany na Ostrośłupie $SABC$, którego podstawa ABC , nie odmięnia się, będzie tym mniejszy, im mniejszą damy mu wysokość, to jest: im liczba przecięć Ostrośłupa będzie większą. Można zaś uczynić tén Graniaśłup mniejszym od iakiegokolwiek Graniaśłupa naznaczonego, zamieniając tén ostatni Graniaśłup na inny, któryby miał za podstawę Trójkąt ABC i dzieląc wysokość daną Ostrośłupa, na tyle części równych aby każda z nich była mniejszą od wysokości tego Graniaśłupa tak przerobionego.

Mając więc dany Ostrośłup, można wén wpisać, i opisać na nim sposobem wyżej wyrażonym, tyle Graniaśłupów, aby różnica dwóch summ, mniejszą była od iakiegokolwiek Graniaśłupa naznaczonego, a tym bardziej, aby różnica Ostrośłupa od iednéy z tych summ mniejszą była od iakiegokolwiek Graniaśłupa naznaczonego.

96. Twierdz. 2. Dwa Ostroślupy trójkątne mające równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa Ostroślupy nie były równe, tedy dajmy, że jeden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniejsza ich różnica zamieniona była na Graniastółup mający równą z temi Ostroślupami podstawę. Podzielmy wysokość jednego z tych Ostroślupa na tyle części równych, aby każda z nich mniejsza była od wysokości tego Graniastółupa. Wpiszmy w ten Ostroślup i opiszmy na nim Graniastółupy sposobem wyrażonym w poprzedzającym Twierdzeniu przybranym. Toż uczynmy i na drugim Ostroślupie; wszystkie Graniastółupy wpisane i opisane, na tych dwóch Ostroślupach, będą równe iedne względem drugich (87, 88) a zatem summa Graniastółupów wpisanych np. w jeden Ostroślup będzie równa summie Graniastółupów wpisanych w drugi Ostroślup. Ze zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ Graniastółupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostroślupie, mniejszą od różnicy mniejszej dwóch Ostroślupów, więc tym bardziej różnica tego Ostroślupa od summy wszystkich Graniastółupów weni wpisanych, mniejsza będzie, od różnicy mniejszej tych dwóch Ostroślupów; a zatem i różnica pierwszego Ostroślupa, od summy Graniastółupów wpi-

O Piramidach albo Ostrośłupach. 127

wpisanych w drugi Ostrośłup, mnieyszą będzie, niż różnica pierwszego Ostrośłupa od drugiego. Summa tedy Graniastostłupów wpisanych w ten drugi Ostrośłup, byłaby większą od tego drugiego Ostrośłupa, co bydź nie może; a przeto te dwa Ostrośłupy nie mogą sobie bydź nierówne.

97. *Twierdź*: 3. Graniastostłup trójkątny, może zawsze bydź rozłożony na trzy Ostrośłupy trójkątne równe, z których dwa mieć będą tę samą podstawę i wysokość, co i Graniastostłup.

Niech będzie Graniastostłup trójkątny $ABCEF$, można go rozłożyć na trzy Ostrośłupy trójkątne równe, z których dwa, tę samą, co on mieć będą podstawę i wysokość.

Táb. IV.

Fig. 5.

Przez bok AC , podstawy ABC , Graniastostłupa, i przez koniec F , krawędzi tego Graniastostłupa nie przechodzący, przez punkta A i C , przeciągniemy płaszczyznę ACF ; odetnie ona od Graniastostłupa, Ostrośłup trójkątny $FABC$, mający za wierzchołek, punkt F , a za podstawę. Trójkąt ABC , a zatem, ten Ostrośłup, tę samą co i Graniastostłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF , ściany przeciwnéj podstawie, i przez punkt C , przeciągniemy płaszczyznę ECF ; odetnie ona

ona od Graniastopu, Ostrostop trójkątny: CEDF, mający za wierzchołek, punkt C, a za podstawę Trójkąt DEF, równy Trójkątowi: ABC, a zatem i ten drugi Ostrostop ma tę samą także co i Graniastop, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostrostopy: FABC, CDEF równe mają, wysokości, i podstawy, a zatem są równe (96) Zostanie jeszcze po tych dwóch przecięciach, Ostrostop CFEA, zakończony czterema Trójkątami ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni Ostrostop iako mający za podstawę, Trójkąt np. ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostrostop zaś CEDF, iakoby miał za podstawę, Trójkąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Trójkąty, które przyśtać do siebie mogą; więc te dwa Ostrostopy mają podstawy równe, ACE, DEC i na iednej płaszczyźnie znajdujące się; a oprócz tego, mają spólny wierzchołek w punkcie F, a zatem i wysokość równą; więc są równe; wszystkie tedy trzy Ostrostopy, na które Graniastop był podzielony, są równe.

Wzajemnie Ostrostop Trójkątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część Graniastopu mającego tę samą co

O Piramidach albo Ostrosłupach. 129

co i Ostrosłup podstawę, i wysokość.

Niech będzie Ostrosłup trójkątny: ABCF, którego podstawa ABC, a wierzchołek F.

Na téż podstawie ABC, wystawmy sobie, jakoby zbudowany Graniałostłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znajdowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znajdują się dwie ściany Ostrosłupa, i krawędź im wspólna BF. Podług Twierdzenia poprzedzającego, ten Graniałostłup jest trzy razy tak wielki, jak Ostrosłup; więc też i ten Ostrosłup jest trzecią częścią tego Graniałostłupa. A że wszystkie Graniałostłupy mające równe podstawy i wysokości, są równe; więc Ostrosłup trójkątny jest trzecią częścią Graniałostłupa jakiegokolwiek, mającego taką samą jak on podstawę i wysokość.

98. *Twierdź:* 4. Ostrosłup jakikolwiek jest trzecią częścią Graniałostłupa mającego tę samą co on podstawę, i wysokość.

Dowód: Jakażkolwiek będzie podstawa Ostrosłupa, poprowadźmy na nię przekątnych tyle do wszystkich kątów, ile można. Przez te wszystkie przekątne, i przez wierzchołek Ostrosłupa niech przechodzą płaszczyzny; Ostrosłup będzie
I przez

przez tę płaszczyznę podzielony na tyle Ostrosłupów trójkątnych, na ile Trójkątów podstawa była podzielona przez przekątną; każdy z tych Ostrosłupów trójkątnych, będzie trzecią częścią Graniałostłupa mającego taką samą jak on podstawę, i wysokość; a zatem summa wszystkich tych Ostrosłupów trójkątnych, to jest cały jakikolwiek Ostrosłup z nich się składający, równać się będzie trzeciej części summy wszystkich tych Graniałostłupów, albo co na jedno wychodzi, równać się będzie trzeciej części Graniałostłupa mającego tę samą podstawę i wysokość, co i Ostrosłup.

99. *Wnioski.* Cokolwiek się o stosunku Graniałostłupów powiedziało, toż mówić można i o stosunku Ostrosłupów, które mając takie same jak i te Graniałostłupy, podstawy, i wysokości, są trzecimi względem nich częściami.

1. Dwa Ostrosłupy jakiegokolwiek (proste lub ukośne, foremne lub nie foremne) z równymi wysokościami, tak się do siebie mają, jak ich podstawy.

2. Dwa Ostrosłupy z równymi podstawami, tak się do siebie mają, jak ich wysokości.

3. Dwa Ostrosłupy są równe, gdy ich podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4.

4. Dwa Ostrostupy równe, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowości Ostrostupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część dwóch liczb rozmnożonych, z których jedna znaczyłaby wielkość powierzchni podstawy tego Ostrostupa, a drugą, wielkość jego wysokości.

100. *Uwaga.* Mając dane w liczbach sześć krawędzi iakięgo Ostrostupa trójkątnego, można wyznaczyć bryłowość tego Ostrostupa.

Jakoż złożywszy Trójkąt z trzech takowych krawędzi, i uważając go iak podstawę Ostrostupa; a na trzech bokach téj podstawy, zrobiwszy trzy Trójkąty, na téż samé, co i podstawa płaszczynie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; té Trójkąty będą ścianami Ostrostupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Trójkąta wziętego za podstawę, i z dwóch kątów ścian dwóch przy podstawie. Ponieważ zaś té kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a w szczególności będzie można wyrachować stosunek wysokości Ostrostupa, do spólnego przecięcia tych dwóch ścian. A że to spólne przecięcie jest dane co do wielkości, więc do-
12 dziemy

dziemy i wysokości Ostrosłupa, a zatem i jego bryłowości, która zawista od wysokości Ostrosłupa, i powierzchni jego podstawy.

101. Uwaga 2. Można tę bryłowość wyznaczyć i bez Trygonometrii, iako się to pokáže w Algiebrze.

102. Uwaga 3. Gdy Ostrosłup prosty, jest foremny, a zatem trzy ścian jego krawędzie są równe; Kwadrat wysokości Ostrosłupa, równa się różnicy kwadratu iednej krawędzi, od kwadratu promienia koła na podstawie opisanego. A przeto ta wysokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometrii. Tę zaś sposób postępowania przytósować można do wszystkich Ostrosłupów foremnych, iakżkolwiek byłaby liczba ich boków w podstawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowość Bryły nazwaney Czworoscianem (Tetredrum.)

Bok ieden Trójkąta równobocznego wyznaczywszy przez liczbę 2. kwadrat wysokości tego Trójkąta wyrazi się przez liczbę 3. Promień koła opisanego jest $\frac{2}{3}$ téy wysokości, więc kwadrat tego promienia, jest $\frac{4}{9}$, kwadratu wysokości Tróy-

O Piramidach albo Ostrosłupach. 123

Trójkątą ; a zatem kwadrat tego promię-
nia wyrażá się przez $\frac{12}{9}$. Że zaś kwadrat

$$\begin{aligned} \text{wysokości tego Ostrosłupa iest } 4 - \frac{12}{9} \\ = \frac{24 - 4 \times 6}{9} \text{ więc sama wysokość będzie} \\ = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$

Powierzchnią Trójkątą służącego za
podstawę wyrazi się przez $\sqrt{3}$, a zatem
bryłowatość Ostrosłupa będzie wyrażo-
ną przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; to iest bryłowatość Ostro-
słupa tak się má do bryłowatości Sze-
ścianu równego; co do boków Ostrosłupo-
wi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; al-
bo iak 2 do $12\sqrt{2}$, albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo
nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; który to stósu-
nek blizki iest stósunku 2 do 17, albo 33
do 280, a bardzo mało różni się od stósun-
ku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość
Ośmiościanu foremnego.

Możná sobie Ośmiościan wystawić
w myśli, iakoby złożony z dwóch Ostro-
słupów prostych kwadratowych, stykaią-
cych się z sobą równemi podstawami.

Wyra-

Wyraziwszy bok jeden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie, jednego z tych dwóch Ostrołupow, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ostrołupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to jest 4, i 2, to jest będzie $= 4 - 2 = 2$. Wysokość zaś tego Ostrołupa wyrazi się przez $\sqrt{2}$; więc bryłowość jednego tego Ostrołupa będzie oznaczona przez $4\sqrt{2}$, a zatem

bryłowość Ośmiościanu ³ przez $8\sqrt{2}$.

Jest tedy bryłowość Ośmiościanu ³ formnego do bryłowości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $8\sqrt{2}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 3; który to stó-

³ sunek blizki jest stósunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stósunku 33 do 70.

103. Uwaga 3. Ponieważ ściany Ostrołupa są powierzchniami płaskimi i tańsze trójkątnymi; wyznaczenie jego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Ostrołup jest prosty, powierzchnią jego (opócz podstawy) równą będzie Trójkątowi, któryby miał za podstawę, obwód podstawy Ostrołupa; a wysokość równą wysokości ściany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe.) Wyba-

Wyhoczienie (Digressio) O SPOSOBIE WYCZERPANIA nazwanego po Łacinie Methodus exhaustionis; mające służyć za wstęp do Rozdziałów następujących.

104. Sposób, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwóch Ostrośłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Ostrośłupów zawarty jest między dwiema ilościami, których różnica może być mniejszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to jest: że każdy Ostrośłup jest zawarty między summą Graniastostłupów na nim opisanych, i summą Graniastostłupów weni wpisanych; i że tych dwóch summ różnica może być mniejszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardzięj każdego z tych Ostrośłupa różnica, od iednęy z tych summ, może być mniejszą, niż iakakolwiek ilość naznaczoną. Skąd można było Ostrośłupóm porównywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stósunku, iednęy z tych summ, n p. summę Graniastostłupów opisanych na iednym Ostrośłupie; do drugięy z tych summ, to jest do summ Graniastostłupów w jednakięy liczbie, opisanych na drugim Ostrośłupie. Ze zaś, gdy Ostrośłupy miały równe podstawy i wysokości, te dwie summy Graniastostłupów były równe; więc też i Ostrośłupy, których różnica od tych

tych dwóch summ może być mniejszą, niż iakąkolwiek ilość naznaczoną, będą równé.

105. Gdyby dwa Ostrołupy miały tylko wysokości równé, a podstawy nierówne; możnaby tymże samym prawie sposobem okazać, że są do siebie, iak ich podstawy; a to stądby się wzięło, że w tymże samym stosunku byłyby do siebie summy Graniastolupów, opisanych na każdym z tych Ostrołupów; i że każdy z tych Ostrołupów może się różnić od każdej z tych summ, odpowiadających sobie, ilością mniejszą, niżeli jest iakąkolwiek ilość naznaczoną.

106. Ponieważ ten sposób wnoszenia, stosunku dwóch ilości, które bezśrednie z sobą porównywać jest trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziałach następujących, przeto nie zawadzi okazać jeszcze pewność jego na kilku przykładach, aby już potem nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, który zawsze jest iednakowy.

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Równoległoboki mające równe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba jeszcze dowieśdź, że i dwa Trójkąty, których równe są wysokości, mają się do siebie iak ich podstawy.

O Piramidach albo Ostrośłupach 137

wy. (W tém zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Trójkąt jest połową Równoległoboku, tęże co on podstawy i wysokości.)

Niech będą dwa Trójkąty: ABC, abc. Táb. IV. Fig. 6.
równé wysokości, a z nie równemi podstawami; trzeba dowieśdź że się tak mają do siebie, iak ich podstawy, a to stąd, że i Równoległoboki iednakiéy wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Podzielmy bok ieden np. AC, na pewną liczbę części równych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy równoodległe od podstawy; a na każdéy z tych równoodległych wpiszmy i opiszmy Trójkątowi ABC, Równoległoboki, mające za spólną wysokość równé oddalenie dwóch naybliższych równoodległych.

Różnica Równoległoboków opisanych, od Równoległoboków wpisanych, równać się będzie naywiększemu z nich Równoległobokowi. Ta zaś różnica może bydź mnieyszą zrobioną, niż iakikolwiek Równoległobok naznaczony, odmieniwszy go na inny Równoległobok, któryby tę samę, co i Trójkąt miał podstawę, i kąt z nim przy podstawie spólny; a potém podzieliwszy drugi bok AC, Trójkąta na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdy-

Gdyby to być mogło, aby dwa Trójkąty: ABC , abc , nie miały się do siebie, iak ich podstawy; tedy jeden z tych Trójkątów; n p. ABC , byłby do uczynienia tego stosunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, jeżeli to być może, trzeba powiększyć Trójkąt ABC , Równoległobokiem $ABFE$, aby się tak miał do Trójkąta abc , iak AB do ab .

Podzielmy bok AC , na tyle części równych, aby każda z nich mniejsza była od linii AE ; wpiszmy potem i opiszmy Trójkątowi Równoległoboki, w sposób wyżej wyrażony. Niech będzie największy z nich Równoległobok $AGHB$. Różnica summy Równoległoboków opisanych od summy Równoległoboków wpisanych, uczyniona jest mniejszą, niżeli Równoległobok $ABFE$; tym bardziej zaś różnica summy Równoległoboków opisanych, na Trójkącie ABC , od tegoż Trójkąta, ABC , mniejsza będzie, niżeli Równoległobok $ABFE$; a zatem summa wszystkich Równoległoboków opisanych, mniejsza jest od Równoległoboku $ABFE$, wraz wziętego z Trójkątem ABC .

Podzielmy i bok ac , Trójkąta abc , na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC ; opiszmy na tym Trójkącie Równoległoboki, tak iak wyżej.

Ró-

O Piramidach albo Ostrosłupach 139

Równoległoboki opisać, na tych dwóch Trójkątach, a odpowiadające sobie, tak się mieć będą do siebie, iak podstawy AB , ab , tychże Trójkątów; więc też i summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Trójkącie ABC , tak się mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Trójkącie abc , iak podstawa AB , pierwszego Trójkąta, do podstawy ab , drugiego; toiest: przez przypuszczenie, iak summa, z Trójkątą ABC , i z Równoległoboką $ABFE$, do Trójkąta abc . A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mniejszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byźby powinien być mniejszy od drugiego; toiest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Trójkącie abc , powinna być byźby mniejsza od Trójkąta abc , co jednak byźby nie może, a zatem stosunek podstaw tych dwóch Trójkątów, tenże sam iest, co i samych Trójkątów.

Podobnym sposobem można by okazać, że i drugi Trójkąt abc , nie powinien byźby powiększony, aby miał ten sam do Trójkąta ABC , stosunek, co i ich podstawy.

Przykł. 2. Niech Trójkąty ABC , abc , wystawiają dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C , c , i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów.

Niech

Niech. té obadwa Ostrosłupy, będą jednakowej wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowości tych Ostrosłupów, tak się mają do siebie, jak ich podstawy, a to z własności Graniałostłupów jednakowej wysokości, które także w takim jak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się już wyżej dowiodło.

Okáže się, w podobny sposób, że opisawszy i wpisawszy jednemu z tych Ostrosłupowi, Graniałostłupy, równej wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie największemu Graniałostłupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mniejszą była niż jakikolwiek Graniałostłup naznaczony; a tym bardziey różnica Ostrosłupa od każdej z tych summ mniejszą będzie, niżeli ten Graniałostłup.

Wpisawszy i opisawszy drugiemu Ostrosłupowi, tyle co i pierwszemu Graniałostłupów; summa tych wszystkich Graniałostłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, jak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego. Także i summy Graniałostłupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwóch Ostrosłupów.

Gdyby to albowiem byż mogło, aby stosunek dwóch tych Ostrosłupów, nie-

O Piramidach albo Ostrosłupach 141

nierówny był stosunkowi ich podstaw, tedy jeden z tych Ostrosłupów, byłby n.p. nadto mały na ten stosunek. Przydajmy mu więc tę ilość, którą powiększony, zachowa ten stosunek, i zamieńmy też ilość na Graniałstosłup równy z nim podstawy. Temu Ostrosłupowi wpiszmy i opiszmy Graniałstosłupy iednakię wysokości, tak iednak małe, aby różnica sumy Graniałstosłupów wpisanych od opisanych, mniejszą była od różnicy naznaczonej; będzie tym bardziej różnica sumy Graniałstosłupów opisanych na tym Ostrosłupie, od tegoż Ostrosłupa mniejszą, niżeli różnica naznaczona; a zatem summa tych Graniałstosłupów mniejszą będzie niżeli summa z Ostrosłupa i z różnicy naznaczonej.

Na drugim Ostrosłupie opiszmy tyleż, co i na pierwszym Graniałstosłupów.

Summa wszystkich Graniałstosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy Graniałstosłupów opisanych na drugim Ostrosłupie, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego; to jest: iak summa z pierwszego Ostrosłupa, i z różnicy jego mniemaney, do drugiego Ostrosłupa.

A że się pokazało, iż pierwszy poprzednik mniejszy jest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być
mniejszy.

mniejszy od drugiego, co jednak być nie może.

Węzłósunek dwóch tych Ostrosłupów, nie różni się od słósunku ich podstów.

107. Uwaga. Użyliśmy już tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiódłszy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnych, z jednaka liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie mają, jak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mniejszą być może od jakiegokolwiek ilości naznaczonej, wywiedliśmy stąd proporcjonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z Trójkątem mającym za wysokość promień jego, a za podstawę, okrag; a to z podobnej własności Wielokątów na koło opisanych.

W którymkolwiek z tych przykładów, n. p. w ostatnim okrag koła jest granicą między obwodami Wielokątów wpisanych i opisanych, do której każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więcej boków mu damy, tak dalece, że przyśledz można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą, mniejszą ilością, niż jakakolwiek ilość naznaczoną, a tym mniej jeszcze różnić się będą ich obwo-

O Piramidach albo Ostrosłupach 143

obwody od okręgu koła. Toż samo mówić można i o ich powierzchniach. Obwody Wielokątów podobnych na dwóch kołach opisanych, zawsze tę mają własność, iż są proporcjonalnemi tychże kół promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice między Wielokątem i kołem, też samę własność mają; lubo choćby go na więcej coraż częstek podzielić (byleby liczba była skończoną) nie przydzieliemy nigdy do tego, abyśmy całe zgubili tę różnicę, która zachodzi między Wielokątem, i kołem; toieść: abyśmy Wielokąt całe na koło iemu równe zamienili.

Ten sposób postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie nie zdawało, aby linie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich linii prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbiór bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nadzwyczajney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościanny* (Polyedra) bardzo wielką liczbę ścian mające.

Po tych, które się tu dały objaśnieniami, obejdzie się w następujących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*.

panią. Dostyc będzie okazać, że powierzchnie krzywe i bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub bryłami, o których już mówiliśmy, a które mogą się różnić od siebie mniejszą ilością, niż iakąkolwiek ilość podana. Gdy zaś przydzie mówić o ścianach brył, i o ich *warstach* (*laminæ*) i t.d. tedy rozumiem, że przez poprzedzające obszernie objaśnienia, dostyc się wytłumaczyło, iak dalecy bydź powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania brył, iakoby złożonych z powierzchni ustanych iednych nad drugimi.

ROZDZIAŁ VII.

O *Walcach*.

180. Niech będą dwa koła równe nakerślone na dwóch płaszczyznach równoodległych. Przez linią łączącą ich śródky, niech przechodzi iakąkolwiek inną płaszczyzna. Niech będą złączone inną linią końce dwóch promieni znajdujących się po iednój stronie linii łączącej śródky, i służących za wspólne przecięcia téj płaszczyzny z płaszczyznami dwóch kół; niechay ta linią końce dwóch promieni łączącą obracać się równym

wnym wszystkich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwóch kół. Powierzchnią krzywą obrotem tym linii naznaczoną, nazywa się *Powierzchnią walcową*. Bryła zakończoną temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:). Liniją prostą łączącą środki tych dwóch kół, nazywa się *Osią* tego Walca. (Axis) Dwa koła na których się Walec kończy, nazywają się jego *podstawami*. Prostopadła spuszczone od punktu któregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś Walca, albo liniją łączącą środki dwóch podstaw iego, prostopadłą jest do płaszczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś jest pochyłą do tychże płaszczyzn; wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniją robiącą obrotem swoim powierzchnią walcową, równoodległą jest w początkowym swoim położeniu, od osi walca (bo ta linija z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokacie tym, którego dwoma innemi bokami, są dwa promienie kół, równe i równoodległe). Ze zaś ta linija zawsze jest od pierwszego swego położenia równoodległą, więc zawsze będzie równoodległą od osi. Wzajemnie, gdy przez punkt którykolwiek powierzchni walcowej pociągniemy liniją, równoodległą

K od

od osi, ta linia zmiesza się z linią, którą obrotém swoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta linia znajdować się będzie na powierzchni walcowej. Linią równoodległą od osi, a przechodzącą przez punkt którykolwiek powierzchni walcowej, nazywa się *bokiem* Walca; wszystkie zatem boki Walca są równe, a w szczególności równa się osi.

1 ro. *Twierdż: 1.* Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Táb. V. Niech będzie CA ac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzący przez os jego Cc, i niech BD będzie spólném przecięciem téj płaszczyzny, i drugiey równoodległéy od podstawy.

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca jest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzący przez os, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległými; więc Czworokąt ACBD, jest Równoległobokiém, a zatem bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobém okazać można równość wszystkich linii prowadzonych od punktu

punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowej, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatem to przecięcie jest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe; a w szczególności, równe są podstawie.

III. *Wniosek.* Stąd wynika inny sposób, którym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to jest przez ruch koła taki, którymby się to koło w równy zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktów jego nie schodził nigdy z linii prostej danej co do tej położenia.

W szczególności zaś Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Równoległoboku prostokątnego, około iednego z boków jego.

II 2. *Twierdź:* 2. Powierzchnią krzywą Walca — prostego, równą się Prostokątowi, któryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowódz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niej dwa Wielokąty foremne, z równą liczbą boków, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważamy iakoby zrobione Graniastopy pro-

K₂ sté,

ste, téż co i Walec wysokości, powierżchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniastopów równe będą względem Prostokątów mających wysokość Walca; podstawy zaś równe obwódóm tych Wielokątów; a zatém te dwie powierżchnie pobocznych ścian Graniastopów, tak się mieć do siebie będą, iak obwody tychże Wielokątów: Tym mniej/więc różnić się od siebie będą te dwie powierżchnie, im mniej brakować będzie obwódóm tych Wielokątów do równości, to jest, im większą liczba będzie ich boków; i różnica tych powierżchni mieysca bydz. może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziej powierżchnia krzywá Walca może się mniej iefczce różnić od jednéy z tamtych powierżchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierżchnia krzywá Walca prostego, równá się Prostokątowi mającemu wysokość tego Walca, a podstawę równą okręgowi podstawy jego.

113. *Wnioſki* 1. Powierżchnie krzywé Walców prostych, iednakiéy wysokości, tak się do siebie mają, iak promienie ich podstaw.

2. Powierżchnie krzywé Walców prostych mających równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnią całą Walca prostego, równą się Prostokątowi mającemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość sumę z wysokości Walca, i z promienia podstawy jego, (ponieważ summa z powierzchni dwóch podstaw Walca, równa jest Prostokątowi mającemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień jednej z tych podstaw). Jest zatem powierzchnią całą Walca prostego proporcjonalną Prostokątowi, któryby miał za boki, promień podstawy Walca, i sumę z tegoż promienia z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, jest jednostaynym.)

114. Uwaga. Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywéy Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do jego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, więkzéy niż początkowéy Jeometrii wiadomości wyciągá, przeto nie może być przez nią wyznaczona i powierzchnią krzywá walca ukośnego.

115. Twierdź. 3. Dwa Walce równé są w brylowatości, których tak podstawy iako i wysokości, są równé.

Dowód: wpisawszy, i opisawszy podstawóm tych dwóch Walców, Wielokąty forémné, o jednakowéy liczbie boków,

ków) a, zrobiwszy na tych Wielokątach, Graniastopy równy z walcami wysokości, mające ściany równoodległe względem osi tych Walców; różnica Graniastopy opisanego na jednym z tych Walców, od Graniastopy w tenże Walce wpisanej, równać się będzie Graniastopowi mającemu tę samą, co tamte dwa wysokość, a podstawę równą różnicy dwóch ich podstaw. A że różnica tych dwóch podstaw, mniejszą być może, niż iakąkolwiek ilość naznaczoną; więc też i różnicę dwóch Graniastopów, wpisanej i opisanego, można uczynić mniejszą od iakiejkolwiek ilości naznaczonej, a tém bardziej różnica jednego z tych Graniastopów, od Walca może być mniejszą uczynioną, niż iakąkolwiek ilość naznaczoną.

Ze zaś dwa Graniastopy których podstawy są podobne n. p. opiane na tych dwóch Walcach są równe, więc też i te dwa Walce są równe, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania. w Rozdz. XII. Części I.)

116. *Twierdzenie 4.* Walce z równymi podstawami, mają się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierdzenie 5.* Walce z równą wysokością mają się do siebie, iak ich podstawy.

Do-

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo jest prawie, co i dowodzenie Twierdzenia 3; położywszy stosunki nierówności podstaw, lub wysokości, na miejsce stosunków ich równości. (Kart. 127 i następujących).

118. *Wnioski.* Cokolwiek się powiedziało o porównywaniu Graniaściosłupów mających podstawy różnego gatunku, wzytko to przystosować można do porównywania Walców z Graniaściosłupami. Walec równy na przykład jest iakiemukolwiek Graniaściosłupowi mającemu równą z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma do Graniaściosłupa téżże co on wysokości, iak podstawa tego walca, do podstawy Graniaściosłupa, a zatem Walec tak się ma do Graniaściosłupa téżże co i on wysokości, a którego podstawa jest Wielokątém opisany na podstawie Walca, iak podstawa Walca, do podstawy Graniaściosłupa, to jest, iak obwód podstawy Walca, do obwodu podstawy Graniaściosłupa; n.p. Walec, którego wysokość równa się średnicy podstawy jego, tak się ma do Sześcianu téj średnicy, iak okrąg koła, do téżże średnicy wziętej 4 razy.

Gdy Walec równy jest Graniaściosłupowi w brylowatości, wysokość ich będzie w stosunku odwrotnym podstaw, i znowu, jeżeli wysokości są w stosunku odwro-

odwrotnym podstów, tedy Walec równa się Graniastołupowi.

Stósunek dwóch Walców, może podobnie, iak i stósunek Graniastołupów, wyłożonym bydź w liniach sposobem następującym: Wyrażmy w liniach stósunek ich podstów; znalazłszy trzecią proporcjonalną do promienia Walca pierwszego, i do promienia Walca drugiego. Do wysokości Walca pierwszego, do wysokości drugiego, i do téj trzeciej proporcjonalnej, szukamy czwartej proporcjonalnej; stósunek promienia Walca pierwszego, do téj czwartej proporcjonalnej, równy będzie stósunkowi bryłowatości pierwszego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podstawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podstawy pierwszego; wysokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielką, iak wysokość pierwszego. Trzecią proporcjonalną do promienia Walca pierwszego i do promienia Walca drugiego, będzie 9 razy tak wielką, iak promień pierwszego Walca; a ponieważ wysokość drugiego Walca, 4 razy jest tak wielką iak wysokość pierwszego, będzie więc czwarta proporcjonalną do wysokości pierwszego Walca, do wysokości drugiego, i do téj trzeciej proporcjonalnej,

nej, cztery razy tak wielką, jak ta trzecia proporcjonalną, toieft: 36 razy tak wielką jak pierwszy promień, a zatem drugi Walec zawiera w sobie pierwszy, razy 36. Jakoż gdyby podstawa drugiego Walca zawierała w sobie razy 9 podstawę pierwszego, a wysokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki jak pierwszy; a że nadto wysokość drugiego Walca zawiera w sobie razy 4, wysokość pierwszego, będzie więc i z téj miary drugi Walec 4 razy tak wielki, jak pierwszy, a z obu-dwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, jak pierwszy.

Có się zaś tycze miary liczebney iakięgo Walca, ta będzie znalezioną, wyráziwszy naprzód w liczbach, powierzchnią ięgo podstawy (podług tego co się powiedziało o powierzchni koła,) a potem rozmnożywszy tę liczbę przez inną, oznaczającą wysokość Walca.

119. Uwaga. Wyznaczenie dokładné tak powierzchni krzywéy Walca prostégo, iako też i całéy ięgo powierzchni; toieft: dokładné porównywanie téj powierzchni z powierzchnią figury płaskiéy prostokréślnéy, n.p. z kwadratem, zawisło od skwadowania koła; a zatem od wyprostowania ięgo okręgu. Toż mówić i o bryłowości Walca, czyli o dokładnym porównywaniu téj bryłowości z bryłowością n.p. Sześcianu. Wy-

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, mających za podstawy, wycinki, lub odcinki koła, zawisło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak się mają do Walca całego, którego są częściami, iak ich podstawy do koła służącego za podstawę temu Walcowi. (g)

ROZDZIAŁ VIII.

O Ostrokrągach.

120. *Defini.* Niech będzie koło nakreślone na iakięj płaszczyźnie i niech od punktu nad tą płaszczyzną, znaydującego się, wyciągnięta linią lub nitką, obraca się około okręgu tego koła. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczoną nazywa się *powierzchnią Ostrokręgu*; Bryła zakończoną przez tę powierzchnię i koło, około którego nitka się obracała, nazwiemy *Ostrokręgiem* (Conus), koło, na którym Ostrokrąg

(g) Luba niektóre części powierzchni Walcowej, same przez się wyznaczyć można; nie można jednak wyznaczyć ich stosunku do całej powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziej jest ciekawą, niż użyteczną, dla tego też dosyć jest o tém namienić.

krąg, ftoi, nazwiemy podstawą iego; wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Linią od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzoną, nazywają się Osią Ostrokregu, a prostopadłą spuszczoną od wierzchołku do płaszczyzny podstawy, nazywają się wysokością. Gdy oś jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy Ostrokregu; Ostrokąg nazywają się prostym; gdy zaś ta oś nie jest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokąg nazywają się ukośnym.

121. Wniosek. Poprowadziwszy linią od wierzchołku Ostrokregu, do któregokolwiek punktu Okregu podstawy iego, ta linią zmięszą się wtedy z nitką rodzącą obrót swoim, powierzchnią Ostrokregu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okregu podstawy; a zatem ta linią całą będzie na powierzchni krzywéy tego Ostrokregu.

Linią poprowadzoną od wierzchołku Ostrokregu na powierzchnię iego krzywéy, aż do okregu podstawy, nazywają się bokiem Ostrokregu.

122. Twierdzenie. 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokregu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to, jest zawsze Trójkątem.

Do-

Dowodz: Linie poprowadzone na téj płaszczyźnie od wierzchołku Ostrokregu, do dwóch punktów okręgu, w których go ta płaszczyzna przecina, będą bokami Ostrokregu, i spólnemi powierzchni jego krzywéy, z tą płaszczyzną przecięciami; a zatem przecięcie Ostrokregu przez tę płaszczyznę, będzie Trójkątém mającym za podstawę, spólné przecięcie téj płaszczyzny, z płaszczyzną podstawy Ostrokregu, a za boki, dwie linie poprowadzone od wierzchołku, do punktów przecięcia okręgu, od płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołek.

123. **Twierdz:** 2. Gdy Ostrokrag przecięty jest przez płaszczyznę równo-odległą od jego podstawy, przecięcie to, jest kątem.

Táb. V.
Fig. 2.

Niech Trójkąt ASB, wyraża iakiékolwiek przecięcie Ostrokregu od płaszczyzny przechodzącej przez jego oś, SC; niech linia DFE wyraża spólné przecięcie téj płaszczyzny i innéy równoodległej od podstawy.

Trójkąty SCB, SFE, są podobné; więc $SC:CB = SF:FE$. A że płaszczyzna przecinająca Ostrokrag równoodlegle od podstawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwsze wyrazy téj proporcji są stałe iakiżkolwiek będzie

dzie promień podstawy przez którą, a razem i przez oś przechodzi płaszczyznę; więc też i czwarty wyraz jest stałym. Poprowadziwszy tedy linię od punktu F, do okręgu przecięcia tę linię równą zawsze będą, a zatem to przecięcie jest kołem, którego punkt F, jest środkiem.

124. *Wnioski.* Te kół powierzchnie tak się do siebie mają, jak kwadraty ich promieni, albo jak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie jest wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Ostrokąg jest prostym; wtedy wszystkie płaszczyzny, równoodległe od podstawy, są do Osi prostopadłe; a stąd, można uważać Ostrokąg prosty, jakoby zrobiony obrotem Trójkąta prostokątnego, około jednego z ramion kąta jego prostego. To ramię będzie Osią Ostrokągu, drugie, naznaczy powierzchnią podstawy, przeciwprostokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Ostrokągu.

125. *Twierdź: przybrane* 1. Gdy linią poprowadzoną na płaszczyźnie podstawy Ostrokągu, dotyka się tej podstawy; płaszczyzna przez tę linię i przez bok Ostrokągu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodzący, wszystkie inne punkta swoje mieć będzie za Ostrokągiem, to jest: nie wspólne z Ostrokągiem

giem nie będzie miała, oprócz boku, przez który przechodzi.

Tab. V.
Fig. 3. Niech będzie SCA , przecięcie Ostro-
kregu od płaszczyzny przechodzący przez
Oś SC , i przez podstawy promień CA .
Niech AT , będzie styczną z tą podstawą,
w końcu A , promienia CA ; Płaszczyzna
przechodząca przez linie: SA , AT , bę-
dzie mieć za Ostrokregiem, wszystkie
punkta swoje, które nie są w linii SA .

Dowódz: Niech płaszczyzna iakakol-
wiek równoodległa od podstawy, Ostro-
krag przecina; niech ca , będzie spólnym
przecięciem téj płaszczyzny, i drugiey
przez oś przechodzący; niech ieszcze
 at będzie przecięciem téjże płaszczyzny,
i drugiey przechodzący przez linie: SA ,
 AT . Linie ca , at , będą równoodległemi
względem linii: CA , AT ; a zatem kąt
 cat , będzie równy kątowi CAT . A że kąt
 CAT jest prostym, więc prostym także
będzie i kąt cat ; a zatem, oprócz pun-
ktu a , linii at , każdy inny punkt, téjże
linii, będzie w większey od środka c ,
odległości, niżeli promień ca , to jest: ni-
żeli odległość punktu na powierzchni
Ostrokregu, i oraz na płaszczyźnie cat ,
znaydującego się, od punktu Osi, do
téjże płaszczyzny należącego. Każdy te-
dy inny punkt téj linii at , oprócz pun-
ktu a , jest za okregiem.

126. *Defini.* O téj płaszczyźnie mówią się, iż się dotyka Ostrokregu, która jedną tylko linią ma spólną z powierzchnią krzywą Ostrokregu.

127. *Wniosek.* Opisawszy Wielokąt na podstawie Ostrokregu, a przez wierzchołek tego Ostrokregu, i przez boki Wielokąta przeciągnawszy płaszczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opisanego, służyć będą za podstawy ścian Ostrogranu, wierzchołek zaś jego, będzie ten sam, co i wierzchołek Ostrokregu; więc ściany tego Ostrogranu dotykać się będą powierzchni Ostrokregu. Ostrográn ten nazywają się opisanym na Ostrokregu: inny zaś, któryby spólny z Ostrokregiem miał wierzchołek, a za podstawę Wielokąt wpisany w podstawę Ostrokregu, nazywałby się w Ostrokrag wpisanym.

128. *Twierdź:* przybrane 2. Mając dany Ostrokrag prosty, można weń wpisać, i opisać na nim dwa Ostrograny foremne, którychby śrófunek powierzchni ściennych bardziey się zbliżał do śrófunku równości, niż jakikolwiek naznaczony śrófunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Ostrogranów, równają się trójkątóm, mającym za podstawy, obwody podstaw Ostrogranów, a wysokości zaś, równe wysokoścóm jednej ze ścian każdego Ostro-

Ostrogranu; a zatem tak się do siebie mają te Ostrograny, iak te dwa Trójkąty. A że podstawy tych dwóch Trójkątów, tak się mają do siebie, iak prostopadłe spuszczone od środka, do dwóch którychkolwiek boków podstaw Ostrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak się też do siebie mieć będą, iak Trójkąty równy z ścianami Ostrogranów wysokości, a mające za podstawy, te prostopadłe; albo iak Prostokąty, teyże z dwiema temi Trójkątami podstawy i wysokości. Że zaś stosunek takich dwóch Prostokątów, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności; to się tak dowodzi.

Tab. V.
Fig. 4.

Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokregu prostego, od płaszczyzny przechodzącej przez oś tego Ostrokregu i przez wysokości SA, SB, dwóch ścian Ostrogranów foremnych, i mających za podstawy, Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Ostrogranów niech będzie opisanym na Ostrokregu, a drugi weń wpisany.

Powierzchnią ścienną Ostrogranu opisanego proporcjonalną jest z Prostokątem CA przez SA, a powierzchnią ścienną Ostrogranu wpisanego, proporcjonalną jest Prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA.

Po-

Powierzchnią ścienną Ostrogranu, mającego za podstawę, podstawę Ostrogranu wpisanego, a za wysokość linią CD , takby się miała do powierzchni ściennéj, Ostrogranu opisanego, iak Prostokąt: $CB \times BD$ do Prostokąta $CA \times AS$; to jest (dlá podobieństwa Trójkątów SAC , DBC) iak kwadrat z CB , do kwadratu z CA ; albo iak powierzchnie podstaw, dwóch Ostrogranów. A że się dowiodło w Rozdziele o kwadrowaniu koła w Części I. że té dwie powierzchnie bardziey mogą byđz zbliżonemi do stósunku równości, niż iakikółwiek dany stósunek nierówności; więc też i stósunek powierzchni ściennych, tych dwóch Ostrogranów, bliższy może byđz stósunku równości, niż iakikółwiek dany stósunek nierówności. Ze zaś powierzchnią ścienną Ostrogranu, którego SCA jest przecięciem, mniej się różni od Ostrogranu, którego przecięciem jest: SCB , niżeli od Ostrogranu, którego przecięciem jest: DCB ; więc tém bardziey stósunek powierzchni ściennych dwóch Ostrogranów, jednego wpisanego, drugiego opisanego na Ostrokręgu prostym danym mniej się różnić może od stósunku równości, niżeli od tegoż stósunku różni się iakikółwiek dany stósunek nierówności.

129. Twierdż: 3. Powierzchnią krzywą Ostrokręgu prostego, równa się Trójkątowi mającemu za podstawę obwód pod-

podstawy Ostrokregu, a za wysokość bok Ostrokregu.

Dowódz: Powierzchnią krzywą Ostrokregu prostego, jest granicą między powierzchniami ściennymi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. A że stósunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stósunku równości bardziej przybliżonym, niżeli jakikolwiek dany stósunek nierówności: więc tém bardziej stósunek powierzchni Ostrokregu prostego, do powierzchni jednego z tych Ostrogranów, n. p. opisanego, mniej się różnić może od stósunku równości, niżeli się od tegoż stósunku różni jakikolwiek dany stósunek nierówności. Ze zaś powierzchnią ścienną Ostrogranu opisanego, równa się Trójkątowi mającemu za wysokość, bok Ostrokregu, a za podstawę obwód podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpiania, a w szczególności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnią koła, równa się Trójkątowi mającemu za podstawę obwód koła, a za wysokość, promień jego): Powierzchnią krzywą Ostrokregu prostego, jest też równa Trójkątowi, któryby miał za podstawę obwód podstawy Ostrokregu, a za wysokość bok jego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzyw. Ostrokregu prostego, równa się wycinkowi koła, któregoby miało za promień, bok Ostrokregu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokregu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Trójkątowi, mającemu za wysokość bok Ostrokregu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokregu.

131. Dla znalezienia ważności katowej, tego wycinku, następująca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokregu, do promienia podstawy jego, tak się ma 360° do ważności katowej, której szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokregu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy; tedy okrąg cały mający za promień bok Ostrokregu, byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy: a zatem i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin.* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy jego; Bryła zakończona z jednej strony, podstawą Ostrokregu a z drugiej tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (*Conus truncatus.*)

133. Twierdź: 4. Powierzchnia krzywa Ostrokregu prostego ściętego, równa się Prostokątowi mającemu za wysokość, bok tego Ostrokregu ściętego, a za podstawę linią równą takiemu okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokregu tegoż ściętego należących to jest: średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Táb. V. Niech Trójkąt SCA, wyraża połowę
Fig. 5. przecięcia Ostrokregu prostego, od płaszczyzny przechodzący przez os ięgo. Niech tenże Ostrokąg będzie ięzcie przecięty płaszczyzną równoodległą od Podstawy, a spólnęm tę płaszczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: ca . Przecięcie: $CAac$, oznaczy przecięcie Ostrokregu ściętego. Pociągniemy linią AB , prostopadłą do boku SA , i równą okręgowi koła, którego promieniem ięst: CA . Trójkąt SAB , będzie równy powierzchni krzywę Ostrokregu całego: poprowadźmy ięzcie linią ab , równoodległą od AB , i spotykającą w punkcie b , linią SB . Ta linią ab , będzie też równą okręgowi koła, którego, promieniem ięst: ca , a Trójkąt Sab , równać się będzie powierzchni krzywę Ostrokregu Sac ; będzie zatem Czworokąt $ABba$, równy powierzchni krzywę Ostrokregu ściętego $caCA$.

Podzielmy teraz linią Aa, na dwie części równe w punkcie E, i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta linia EF, będzie równą okręgowi koła, którego promień równałby się linii ED, to jest średnicy Arytmetycznej między promieniami CA, i ca, dwóch podstaw Ostrokregu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa się Prostokątowi AHGa, mającemu za wysokość, bok Aa, Ostrokregu ściętego, a za podstawę linią EF równą okręgowi średnie arytmetycznie proporcjonalnemu, między okręgami dwóch podstaw tegoż Ostrokregu.

134. Uwaga 1. Wyrażenie następujące powierzchni krzywey Ostrokregu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni kuli (Sphaera).

Od środka E, linii Aa, wyciągniemy linią EI prostopadłą do Aa, spotykającą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą linią aL, równoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równa się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów: AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatem kąt IED, równa się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Tróy-

Trójkąty prostokątne: IED, AaL, a zatem boki ich będą proporcjonalne; więc, $JE: ED = Aa: aL$, (albo Cc) a stąd i okręgi, mające za promienie, linie: IE, ED, są też do siebie, jak linie: Aa, Cc; a zatem prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego linią IE, byłaby promieniem, równałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień, linią ED. A że ten drugi Prostokąt równy jest powierzchni krzywey Ostrokregu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy téżże Ostrokregu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokregu ściętego, równa Prostokątowi mającemu wysokość równą wysokości Ostrokregu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego promieniem byłaby prostopadła, od środka boku Ostrokregu ściętego wyciągniona, aż do jego osi, która to prostopadła jest czwartą geometrycznie proporcjonalną; do wysokości Ostrokregu ściętego, do jego boku, i do średniéy arytmetycznéy między dwoma promieniami; co wżysko łatwo przytósować można i do Ostrokregu całego.

135. Uwaga 2. Wyznaczenie, więc dokładné powierzchni Ostrokregu prostego lub iéy części zawartéy między płaszczyznami równoległými od jego podstawy, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokregu ukośnego, ię-
 łczcie ciężey iest wyznaczyć powier-
 chnię ięgo krzywą, niżeli Walca uko-
 śnego; to zaś pochodzi z nierówności
 ięgo boków, a zatem z nierówności
 ścian Ostrogranów, z podstawami fo-
 rémnemi, opisanych lub opisać się mogą-
 cych na tym Ostrokregu.

136. *Twierdź:* przybrane Bryłowato-
 ści dwóch Ostrogranów z podstawami
 forémnemi, iędnęgo wpisanęgo w Ostro-
 krag; a drugięgo na nim opisanęgo, ró-
 żnica może bydź mnieyfszą, niż iakikol-
 wiek ilość naznaczoną; to iest stósunek
 ich bryłowatości, może bardzięy bydź
 przybliżonym do stósunku równości, niż
 iakikolwiek dany stósunek nierówności.

Dowódz: Różnica tych dwóch Ostro-
 granów, równa się Ostrogranowi tęży
 co onę wyłokości; a którego podstawa
 byłaby równa różnicy ich podstaw. A że
 stósunek tych podstaw, może bydź bar-
 dzięy przybliżonym do stósunku równo-
 ści, niż dany iakikolwiek inny stósunek
 nierówności, więc też i stósunek tych
 dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć
 do stósunku równości bardzięy niż inny
 dany iakikolwiek stósunek nierówności.
 Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogra-
 nów, na trzeci Ostrogran tęży co onę
 wyłokości, można będzie wpisać i opi-
 śać podstawie Ostrokregu dwa Wielokąty,
 z ró-

z równą liczbą boków, takie, którychby różnica mniejsza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tém bardziej jeden z Ostrogranów wystawionych na tych Wielokątach, równy z Ostrokreśnięciem wysokości, mniej się różnił, będzie od Ostrokreśnięcia, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdź:* 5. Bryłowość iakiegokolwiek Ostrokreśnięcia, jest trzecią częścią bryłowości Walca równy z Ostrokreśnięciem podstawy i wysokości.

Dowódz: Ostrograny i Graniałostłupy *iednoimiennie* (ejusdem nominis) wpisane, lub opisané, pierwsze na Ostrokreśnięciu, a drugie na Walcu, iednakiéy z nimi wysokości, są trzecią częścią pierwsze względem drugich. A że té Ostrograny i Graniałostłupy mogą się różnić pierwsze od Ostrokreśnięcia, drugie od Walca, na którym są n. p. opisané, mniej niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania) Ostrokreśnięcie jest téż trzecią częścią Walca.

138. *Wniosek.* Cokolwiek mówiliśmy o porównywaniu Walców, zawistym od ich wysokości, i podstaw, można to wszystko i do Ostrokreśnięć przytósować, które trzecią ich są częścią; podobnie iakośmy i to co się mówiło o porównywaniu Graniałostłupów, do Ostrogranów przytósowali. I tak.

1. Ostrokregi, których podstawy są równe, mają się do siebie, jak ich wysokości.

2. Ostrokregi, których wysokości są równe, mają się do siebie, jak ich podstawy.

3. Ostrokregi, których bryłowości są równe, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Ostrokregi, których podstawy mają się do siebie, w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwóch Ostrokregów w liniach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy jednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znaydując trzecią proporcjonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokregu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokregu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciej proporcjonalnej znalezioney, do czwartej. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokregu, do tej czwartej proporcjonalnej, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokregu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowości Ostrokregu znaydujemy, mnożąc liczbę

oznaczając wielkość powierzchni podstawy jego, przez liczbę oznaczając wielkość wysokości, a potem tę liczbę rozmnożony biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowości Ostrokregu, zawisło od wyznaczenia dokładnego, jego podstawy, a zatem od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowość Ostrokregu, równa się bryłowości iakiegokolwiek Ostrogranu, równy z Ostokregiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdza 6.* Bryłowość Ostrokregu prostego, równa się bryłowości Ostrokregu innego, którego powierzchnią podstawy byłaby równa, powierzchni całej Ostrokregu prostego, a wysokość, równa promieniowi koła wpisane go w Trójkąt równoramienny wyrażający przecięcie Ostrokregu prostego, od płaszczyzny przez oś jego przechodzący.

Niech będzie ASB przecięcie Ostrokregu prostego, od płaszczyzny przez oś jego przechodzący.

Táb. V.
Fig. 6.

Niech będzie SC prostopadła do AB, wysokością, czyli osią tego Ostrokregu. Podzielimy ieden z kątów przy podstawie AB, n. p. kąt A, na dwie równe części, przez linią AD, i prowadźmy ją
aż

aż do punktu D, prostopadłej SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadła DE do SA. Linie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpisanego w Trójkąt przechodzący przez oś Ostrokągu.

Powierzchnia podstawy Ostrokągu, tak się ma do jego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatem powierzchnia podstawy, tak się mieć będzie do całej powierzchni Ostrokągu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Ostrokągu równa się kołu mającemu za promień średnią Jeometryczną między promieniem AC podstawy Ostrokągu, i sumą z tego promienia i z boku Ostrokągu. A że linią AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części; więc AS: AC = SD: CD; i AS + AC: AC = SD + CD: CD; a na koniec (AS+AC) AC: AC^2 = SC: CD.

Więc Ostrokąg mający za promień podstawy, średnią Jeometryczną między AC, i AC+AS, a za wysokość linią CD, miałby podstawę swoję, do podstawy Ostrokągu podanego, w stosunku odwrotnym wysokości; a zatem te dwa Ostrokągi byłyby równe. Że zaś podstawa pierwszego Ostrokągu jest równa całej powierzchni Ostrokągu podanego; więc bryłowość Ostrokągu prostego, równa się bryłowości Ostrokągu innego mającego podstawę równą całej pro-

stęgo Ostrokreśu powierzchni, a wyfkość równą promieniowi koła wpisanego w Tróyką, który iest przecięciem tego Ostrokreśu od płafzczyny przecho-
dzący przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. *Defin.* Niechby Półkoło obracało się około fwoięy fśrednicy, Okrąg iego przebiegnie, tym fwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kulistą* (*Superficies sphaerica*); fámé, zaś półkoło obiegnie mieyfće tą powierzchnią krzywą zakończoną, które się nazywá *Kulą* (*Sphaera* albo *Globus*).

Pod czas tego obrotu, każdy punkt okręgu półkoła, w jednakowéy zawfze byłby od iego fśredka odległości; a zatem i każdy punkt powierzchni kulistey, w jednakowéy téż będzie odległości od tego fśredka.

Kula więc iest bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, której wfzystkie punkta iednakowo fą odległe od pewnego punktu w niéy będącego, nazwanego *fśredkiem*.

Od-

Odległość środka od punktu któregokolwiek powierzchni kuli, nazywamy się *promieniem*. Linia każda przechodząca przez środek kuli, a po obu dwóch stronach kończąca się na jej powierzchni, nazywa się *średnicą*, i dwa razy jest większą od promienia. Ta zaś średnica, około której obracając się półkole, zrobiło kulę, nazywa się *Ośią* kuli.

Gdybyśmy przecięli kulę płaszczyzną przechodzącą przez jej środek, wszystkie punkta przecięcia powierzchni kulistej, przez tę płaszczyznę, byłyby jednakowo odległe od środka kuli, który na temże jest przecięciu.

Więc takie przecięcie jest kołem mającym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaszczyzny, która przez jej środek przechodzi, nazywa się *wielkim kołem kuli*.

Dwa takie koła przecinają się, iedno z drugim na dwie części równe.

Jakoż wspólne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatem i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc jest średnicą obu dwóch. A że średnica przecina koło na dwie równe części; więc i dwa koła wielkie kuli

kuli przecinaia się na dwie części równé.

Gdyby kula przeciętą była płaszczyzną nie przechodzącą przez ięj środek, ale prostopadłą do osi ięj obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od spólnego przecięcia téj płaszczyzny z płaszczyzną półkula, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż półkula tworzącę kule.

Że zaś można sobie wytworzyć w myśli kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot któregokolwiek półkula wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powstała, iednakowey zawsze jest wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaszczyzną, wszędzie przecięcie ięj, będzie kołem: ponieważ można wziąć za oś kuli, tę ięj średnicę, która do téj płaszczyzny jest prostopadłą.

Przecięcie kuli od płaszczyzny nie przechodzący przez ięj środek, nazywają się *małym kołem*.

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie insze punkta téj płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek inzego punktu téj płaszczyzny, od środka kuli, jest przeciw prostopadłą Trójkątą pro-

prostokątnego, który ma promień, za jedno ramię kąta prostego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wszystkie tedy, innsze punkta téy płaszczyzny są od środka odległe większą ilością, niżeli jest promień, a zatem są za kulą.

O płaszczyźnie, nie mającay ani mieć mogącay więcéy nad ieden punkt spólny z kulą mówi się, iż się kuli *dotyka*. Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnawszy na téy płaszczyźnie iakakolwiek linią prostą; ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatem linią ta, będzie stycznią z tém kotem, któreby było przecięciem kuli od płaszczyzny przechodzącay przez tę linią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżej około Walców, i Ostrokregów prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowości kuli, i iey części różnych.

141. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez którego punkt średni poprowadziliśmy stycznią, aż do iey zeyścia

ścią się z obudwóch stron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iedną, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części równé i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie stycznne aż do ich zezyscia się z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połów.

Część promienia przeciągnionego, zawartą między okręgiem, i pierwszą styczną, więcej niż dwa razy większą iest od części zawartéy między okręgiem, i iedną z drugich dwóch stycznych.

Táb. VI.

Fig. 1.

Niech będzie ADB, łuk koła, przez którego punkt średni D, poprowadzona iest styczná spotykająca w punktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta F, i f, łuków: BD, AD, poprowadźmy stycznne: GH, Gh, które spotykają w punktach: G, H, h, promienie przechodzące, przez końce łuków: BD, AD.

Trzeba dowieśdź iż linią BE, więcej niż dwa razy iest większą od linii EH.

Niech linią CF, spotyką w punkcie L, linią Ee; Trójkąty: CDL, CFG, mogą przystać do siebie; więc linie: DG, albo BH, i FL, są równé.

Po-

Poprowadźmy cięciwę BD, którą linią CL spotyka w punkcie I, i BM równoodległą od CL.

Trójkąty prostokątne: BDM, JDL, są do siebie podobne: a że BD dwa razy jest większą od DI; więc też i BM, dwa razy większą będzie od JL; a zatem EM, więcej niż dwa razy większą jest od FL albo BH. Ze zaś w Trójkącie EBM, kąt M, jest roztwarty, a przeto linią BE, większą od linii BM; więc tem bardziej linią BE, więcej niż dwa razy większą jest od linii BH.

142. Wniosek 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E, H, B, spuścimy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek linii: EB, HB, równy będzie trójkątowi linii OQ, PQ, A że EB więcej niż dwa razy jest większą od BH, więc i OQ więcej niż dwa razy większą też będzie od PQ.

143. Wniosek 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe 4, 8, 16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałów, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczególności podziału: gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuścimy prostopadłą

dł. EO, na promień CN; różnica między odległością spodku Q, t. j. prostopadłej, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłej BQ, z końca B, łuku AB spuszczonej, ta m. i. różnica zmniejsza się więcej niż połową za każdym następującym podziałem, a zatem może się naostatek stać mniejszą od jakiegokolwiek ilości naznaczonej.

144. Twierdż: r. Niech będzie łuk koła, nie większy od czwartej części okręgu jego, i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez jeden koniec tego łuku. Z drugiego jego końca spuścmy prostopadłą na pierwszy promień to jest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzoną, tym około osi obrotu łuku, równa się Prostokątowi, mającemu za podstawę linią równą całemu okręgowi, którego ten łuk jest częścią; a za wysokość, linią równą odległości środka, od spodku prostopadłej spuszczonej na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli, cztery razy jest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, t. j. kuli.

Tab. VI.
Fig. 1.

— Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA, przechodzącego przez jeden koniec tego łuku. Popro-

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca się około promienia CN, iak około osi swojej. Powierzchnia krzywą, obrotem łuku AB naznaczoną, równa się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, linią CQ, a za podstawę, linią równą okręgowi, którego CA jest promieniem.

Dowódz: Niech styczná Ee, przechodzi przez średni punkt D, łuku AB, i niech spotyka w punktach E, i e, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielimy dalecy łuk AB, na części równe: 4, 8, 16, 32, i.t.d. a od punktu, w którym ostatnia styczná spotyka promień CB, przy każdym następującym podziale, spiszczamy prostopadłą na promień CN. Różnica między odległością środka, od spodka tej prostopadłej, a linią CQ, zmniejszać się będzie więcej niż połową za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się naostatek stać mniejszą, niż iakakolwiek ilość naznaczoną.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda styczná kreśli powierzchnią krzywą Ostrokregu ściętego równaiącą się Prostokątowi mającemu za podstawę, linią równą okręgowi, którego promieniem, jest CN, a za wysokość, odle-

Mz głośc

głość dwóch prostopadłych spuszczo-
nych na oś, od końców tej stycznej;
a zatem summa powierzchni krzywych,
zrobionych od wszystkich tych styczn-
nych równa się Prostokątowi, mające-
mu tę samą podstawę a wysokość ró-
wną summie wszystkich tych wysokości:
to jest, równą odległości środka, od spod-
ku prostopadłej spuszczonej na oś z pun-
ktu tego, gdzie ostatnia styczna spo-
tyka promień CB. Może tedy różnica
summy powierzchni krzywych Ostrokrę-
gu zrobionych obrotem wszystkich styczn-
nych, muieyfa być od Prostokąta z taką,
jak się wyżej powiedziało podstawą a
z wysokością CQ, niżeli iakąkolwiek ilość
naznaczoną. Summa zaś tych wszyst-
kich powierzchni krzywych, większą
jest zawsze od powierzchni utworzonej
obrotem łuku AB; więc (podług tego,
co się powiedziało w Części I. o sposobie
wyczerpania, i w Rozdziale o kwadowa-
niu koła) powierzchnią krzywą utworzo-
ną obrotem łuku AB, równa się Prostoka-
towi, mającemu za podstawę, okrąg, któ-
rego promieniem jest CA, a za wysokość,
odległość CQ, środka C, od spodka Q,
prostopadłą, spuszczonej na oś z końca B,
tego łuku. (h) Mó-

(h) Nie dosyć tu będzie rznieć okiem na-
to, co się powiedziało o sposobie wyczerpania
i o kwadowaniu koła, ale trzeba, aby Nan-
czyciel w szczególności czytał z Uczniami tę

Mówiąc w szczególności: powierzchnią *Półkuli* (*Hemisphaerium*): utworzoną obrotem czwartej części koła, ABN , równą się *Prostokątowi* mającemu za podstawę okrąg, którego, CA jest promieniem, a za wysokość, promień CN .

A zatem powierzchnią krzywą, utworzoną obrotem łuku BN , równą się *Prostokątowi* mającemu wysokość NQ , a podstawę równą okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnią także całej kuli, równą się *prostokątowi* mającemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego jej koła, a że powierzchnią wielkiego koła równą się *Prostokątowi* mającemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnią kuli cztery razy jest tak wielka, iak powierzchnią wielkiego jej koła, a równa kołu którego promień równałby się średnicy téż kuli.

145. Jdzie zatem, że powierzchnią kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu jej średnicy; iak powierzchnią koła iakie.

wszystkie przystósowania, które, tu i niżej iść może czynić będzie można.

kiegokolwiek, cztery razy wziętą, do kwadratu średnicy tegoż koła: A że powierzchnią koła, jest do powierzchni kwadratu średnicy (iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętę, iako się w Rozdziele XIII. Części I. dowiodło); więc powierzchnią kuli tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy; iak cztery razy okrąg koła; do średnicy iego cztery też razy wziętę, to jest: iak okrąg koła, do swojej średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawisło od skwadowania koła, i od wyprostowania okręgu iego,

146. Powierzchnią całą kuli, tak się ma do powierzchni nakreślonej obrotém łuku NB, iak się ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tęj średnicy, do Prostokąta z linii NQ, i ze średnicy; albo na koniecu, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB, a zatem, iak koło, któreby miało za promień tę średnicę; do koła, któreby miało za promień linią NB. A że powierzchnią kuli równą się powierzchni pierwszego koła; więc powierzchnią nakreśloną obrotém łuku NB, równą się powierzchni drugiego koła.

Tab. VI.
Fig. 2.

Niech będzie NBFA, półkole tworzące obrotém swoim kulę; niech będzie NEDA Prostokąt, którego podstawa jest
sze-

średnica tego półkola; a wysokością promień jego. Podczas obrotu półkola, ten Prostopadły utworzy Walec prosty, którego powierzchnią krzywą zrobioną przez obrot linii ED, równać się będzie Prostopadłowi; mającemu za wysokość średnicę DE, albo AN, a za podstawę okrąg podstawy tego Walca; a zatem ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli.

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy linią QBP, prostopadłą do osi, powierzchnią krzywą należącą do Walca, a zrobioną przez obrot linii EP, równa jest powierzchni należący do kuli, a zrobioną przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Prostopadła ADEN, miałby wysokość równą średnicy podstawy swojej; dotykałby się w punktach A, i N, kuli utworzonej obrotem półkola AFBN; dotykałby się ię także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mówi się, iż jest na kuli opisanym. Nazywają się on także i Walcem Archimedesa; od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł równość powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowości.

149. Powierzchnią jedną z dwóch podstaw tego Walca, równą się Prostokątowi z okręgu tej podstawy, i z połowy jej promienia: a zatem powierzchnia obadwóch razem tych podstaw, równą się Prostokątowi z okręgu jednej podstawy, i z jej promienia. A że powierzchnia krzywa Walca, równą jest Prostokątowi z okręgu podstawy jego, i ze średnicy tejże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równą jest Prostokątowi z okręgu jego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego: a zatem powierzchnia krzywa tego Walca, jest $\frac{2}{3}$ powierzchni jego całej, a przeto i powierzchnia kuli jest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całej Walca na niej opisanego.

150. Uwaga. To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów licznych podobnych następującemu.

Przykt. Jakąż jest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachując na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, jedno prostopadłe do drugiego. Podzielmy okrag jednego z tych kół, n. p. co dziesięć, a l o co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą piaz-
czy-

czyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleźć wielkość powierzchni zawartych między dwoma najbliższemi od siebie przecięciami.

W szczególności zaś, jeżeli Uczniowie mają wiadomość początkową Jęografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których jedno odległe jest od Rownika (aequator), na $23^{\circ} \frac{1}{2}$, a drugie od Biegonu (polus) także na $23^{\circ} \frac{1}{2}$.

Niech będzie CF promieniem jednego koła wielkiego: niech NBF, wyraża Tab. VI.
czwartą część drugiego koła do niego Fig. 2.
prostopadłego: niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła prostopadłego i dwóch płaszczyzn równoodległych od koła pierwszego.

Powierzchnią krzywą półkuli, tak się ma do powierzchni części zawartej między płaszczyznami CF i BQ, iak się ma promień kuli, do linii CQ, która jest wstawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywą półkuli, tak się ma do powierzchni części zawartej między płaszczyznami: CF, i bq; iak wstawą całą, czyli promień do wstawy łuku bF, toiest do linii Cq. Można więc wyrachować tę część powierzchni półkuli, a zatem i ich różnicę, toiest: część powierzchni zawartej między płaszczyznami: BQ, i bq.

151. Twierdź: 2. Bryłowość kuli równą się $\frac{2}{3}$ bryłowości Walca na téj kuli opisanego.

Táb. VI. Niech będzie ACBMA czwarta część
Fig. 3. koła, tworząca Półkulę obrotém swoim
około promienia CB. Niech będzie
CABD kwadrat opisany na téj czwartej
części koła. Tén kwadrat obracając
się około CB, utworzony Walec opisany
na półkuli, który będzie połową Walca
opisanego na całej kuli. Trzeba do-
wieść, iż Półkula utworzona obrotém
czwartej części koła AMBC równa się $\frac{2}{3}$
Walca utworzonego obrotém kwadratu
ACBD.

Poprowadźmy przekątną CD; Tró-
ką BCD utworzony Ostrokrag, którego
podstawa wykreślona będzie promieniem
BD, a za wysokość tego Ostrokregu bę-
dzie BC; toieft będzie tén Ostrokrag ró-
wny z Walcém podstawy, i wysokości.

Od dwóch którychkolwiek punktów
n.p. P, i p Osi CB wyciągniemy prosto-
padłe do niej linie: PQ, pq, te prze-
tną okrag w M, i m, a linią CD w L,
i l; nakreślmy nadto, linie: MN, mn,
LO, lo, równoodległe od osi. Kwadrat
promienia CM, równa się summie kwa-
dratów z PM, i CP: a że linią PQ ró-
wna ieft promieniowi, (tak iako BD,
CA

CA i CB są równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, równa się summie kwadratów z PM, i z PL.

Że zaś Walce utworzone obrotém Prostopadków Pq, PN, PO, mających jednakie wysokości, są do siebie, iak ich podstawy, albo iak kwadraty promieniów tychże podstaw; więc pierwszy z tych Walców będzie równy summie dwóch innych. Podobnym sposobem okazać można, że Walec Pq równa się summie Walców utworzonych obrotém Prostopadków Pm, i Pl.

Takowe dowódzenie ma miejsce chociaż nie od punktów P, i p, ale od którykolwiek innych będą wywiedzione prostopadłe do osi CB; a zatem podzieliwszy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwszy prostopadłe przecinające tak okrąg, iako i linią CD; summa wszystkich Walców składających Walec ADB, równać się będzie summie wszystkich Walców wpisanych w Półkulę, wraz z summą wszystkich Walców opisanych na Ostrokręgu, albo summie wszystkich Walców opisanych na Półkuli, wraz z summą wszystkich Walców w Ostrokrąg wpisanych. A że summa wszystkich Walców wpisanych lub opisanych na Półkuli, może się mniejszą ilością różnić od téjże Półkuli, niż iakąkolwiek ilość

ilość naznaczoną; (§. 94. i nast. §. 106.) a wtedy i summa wszystkich Walców wpisanych, lub opisanych, Ostrokregowi, różnić się też od tego Ostrokregu będzie mnieyszą ilością, niż jest ta ilość daną.

Więc (podług tego, co się powiedziało w Części I. o sposobie wyczerpania,). Walec utworzony obrotem kwadratu CABD, równa się summie z Półkuli utworzonej obrotem czwartej części koła, i z Ostrokregu utworzonego obrotem Trójkąta BCD.

A że Ostrokrag utworzony obrotem Trójkąta BC, jest $\frac{1}{3}$ Walca; więc Półkula utworzona obrotem czwartej części koła AMBC, jest $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatem kula, któraby utworzyła się obrotem Półkoła, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opisanego na téj kuli, a utworzonego obrotem Prostokąta opisanego na Półkołu tworzącém kulę.

152. *Wniosek 1.* Stósunek bryłowości kuli do bryłowości Walca opisanego, ten sam jest; co i stósunek powierzchni kuli, do powierzchni całej Walca opisanego; (149).

153. *Wniosek 2.* Bryłowość kuli, równa się bryłowości Ostrokregu, który

ryby miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość promień téżże kuli. Jakoż ten Ostrokrag mając podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanego, byłby cztery razy większy od Ostrokregu inszego równey z nim wysokości, a mającego podstawę równą z Walcém. A że ten drugi Ostrokrag, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokregu mającego równą z Walcém wysokość i podstawę: a zatem byłby połową tego Ostrokregu, który jest $\frac{1}{3}$ Walca; Więc Ostrokrag mający równą z Walcém podstawę, a wysokość równą promieniowi kuli, jest $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatem Ostrokrag mający za wysokość promień kuli, a podstawę cztery razy większą od podstawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula jest $\frac{2}{3}$ tegoż Walca; więc kula równa się temu Ostrokregowi.

Można to samo jeszcze i w ten sposób okazać.

Niech będzie iakikolwiek *Wielościán* (Polyedrum) którego wszystkie ściany dotykają się kuli: uważając każdą z tych ścian iak podstawę Ostrogranu mającego swóy wierzchołek we szrodku Wielościánu; brylowatość tego Wielościánu, równać się

się będzie bryłowości jednego takiego Ostrogranu, któryby miał za wysokość promień kuli, a za podstawę sumę podstaw, Ostrogranów, na które podzielony był ten Wielościán; to jest powierzchnią całą tego Wielosciánu.

To podanie zawsze jest prawdziwe, iakążkolwiek będzie liczba ścián tego Wielosciánu; więc (podług tego, co się mówiło o sposobie wyczerpania, można by łatwo dowieść, że też i do kuli w szczególności przystosowane to podanie, jest prawdziwem, a zatem że kula, równa się Ostrokregowi, któryby miał za wysokość, ię promień, a za podstawę, całą ię powierzchnią.

154. *Wniosek 3.* Wycinek kuli utworzony obrotem wycinka kołowego BCM, równy jest Ostrokregowi mającemu za wysokość, promień téj kuli, a za podstawę, koło, równe powierzchni kulistej, utworzonej obrotem łuku BM; to jest koło, którego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatem bryłowość tego wycinka, tak się má do bryłowości kuli, iak powierzchnią tego wycinka kuli, czyli część powierzchni kulistej do powierzchni całej kuli; albo iak wysokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek 4.* Taż bryłowość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycina-

wycinka koła BCM, iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotém Prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka kuli tak się ma do powierzchni kuli, jak BP, do średnicy kuli albo jak Walec utworzony obrotém Prostokąta BPQD do Walca opisanego na kuli. A że kula iest $\frac{2}{3}$ Walca na niej opisanego; więc i wycinek kuli, utworzony obrotém wycinka koła BCM, iest też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotém Prostokąta BPQD.

156. Wniosek 5. Podobnie, i część kuli utworzoną obrotém wycinka ACM iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotém Prostokąta CAQP. A że część kuli (którą to część nazwać można *klóćem kulistym* (Truncus sphaericus) utworzoną obrotém części kołowej ACPM, iest summa z wycinka kulistego utworzonego obrotém wycinka kołowego ACM, i z Ostrokągu utworzonego obrotém Trójkąta CPM; więc bryłowość tego kłoca kulistego, równa się summie z $\frac{2}{3}$ Walca téż z nim wysokości, któryby miał za podstawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca jednakiey także wysokości, a którego podstawa byłaby równa drugiemu kołu kłóc ten kończącemu; a zatem bryłowość tego kłoca tak się ma do bryłowości Walca utworzonego obrotém Prostokąta CAQP, jak $\frac{2}{3} CA^2 + \frac{1}{3} MP^2$ do CA^2 .

157. *Wniosek. 6.* Aby znaleźć odcinek kuli utworzonej obrotem odcinka kołowego BMP; uważajmy sobie ten odcinek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrotem czwartej części kołowej ABC, a kłosem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka EDM; od Ostrokągu utworzonego obrotem Trójkąta CPM; albo na koniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ostrokągu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta EDLP.

ROZDZIAŁ X.

O bryłach podobnych.

158. **D**wie Bryły samemi tylko płaszczyznami powierzchniami zakończone, i których wszystkie kąty bryłowe odpowiadające sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadające są podobne; te, mówię dwie Bryły nie różnią się chyba samą tylko wielkością, i jedna wzajem jest drugiej. Tak np. dwa Szóściąny, z których jeden ma bok długi na pół stopy, a drugi na cał jeden, różnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywają się podobnemi.

Przy.

O Bryłach podobnych. 195

Przykłady. Dwa Równoległościany prostokątne są podobne, gdy ich podstawy i ściany są podobne i edne względem drugich.

Dwa Graniastołupy proste, są podobne, gdy podobne są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporcjonalna i ednemu z boków, tychże podstaw.

Dwa Ostrograny, mające kąt bryłowy spólny w wierzchołku podobne będą, gdy podstawy ich są równoodległe.

149. **Uwaga.** Gdy dwie Figury prostokreślne, są podobne; wzięwszy punkt iakikolwiek w jedney z tych figur, i poprowadziwszy od tego punktu linie do wszystkich wierzchołków téy figury, można będzie znaleźć i w drugiéy figurze punkt podobnie pierwszemu położony; od którego ciagnąc linie do każdego téy figury wierzchołka, podzielimy ją na Trójkąty podobne względem Trójkątów, na które podzielona była pierwszą figura. Podobnie téż:

150. **Twierdz: 1.** Wziąwszy w Bryle zakończonéy powierzchniami płafczystemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tyłu Ostrogranów, ile ta Bryła má ścian, biorąc téż ściany za podstawy; można znaleźć i w drugiéy Bryle podobnéy, punkt podobnie pierwszemu położony,
N któ-

który wziąwszy także za wierzchołek, tyluż co i w pierwszej Bryle Ostrogránów wszystkie té Ostrograny będą podobne względem Ostrogránów pierwszej Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek sześciu Ostrogránów, mających za podstawy, ściany tego Sześcianu; gdy w jnszym jakimkolwiek Sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek sześciu Ostrogránów mających za podstawy, ściany tego drugiego Sześcianu; té drugie Ostrograny, będą podobne względem pierwszych.

Toż mówić i o inszych Bryłach foremnych.

Na tém podaniu zasądza się cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłączeniem téy nieco zabawić się.

Wybrąwszy jakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Ostrogránów mających ściany téy Bryły, za podstawy, i na té Ostrograny, Bryłę podzieliwszy, spuścmy od tego punktu prostopadłą do iednéy z ścian téy Bryły; a na ścianie odpowiadającej w drugiéy Bryle, weźmy punkt podobnie na téy ścianie położony, iak i spodek prostopadłej spuszczoney na ścianę pierwszej Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiéy Bryły położonego, wyprowadźmy pro-

O Bryłach podobnych. 195

prostopadłą do téj ściany, tak wysoką aby stósunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stósunkowi dwóch krawędzi, odpowiadających sobie w obudwóch Bryłach. Wierzchołek téj drugiéj prostopadłey weźmy za wierzchołek wszystkich Ostrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny téj drugiéj bryły, będą podobne względem Ostrogranów, na które podzieloną, pierwszą Bryłę.

Dowódz: Odległości dwóch punktów służących za wierzchołki Ostrogranów, od wierzchołków odpowiadających sobie w ścianach, do których prostopadłe są ciążnione, te mówię odległości, są przeciw prostokątnemi Trójkątów prostokątnych podobnych, mających za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadające sobie boki, mają proporcjonalne, toiest mają ię w stósunku dwóch krawędzi odpowiadających sobie w dwóch Bryłach: a zatem wszystkie te ściany, są podobne, i wszystkie ich kąty są równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich składają, mogą przystać do siebie; są więc te dwa Ostrograny podobne. Pochyłości téż ścian Ostrogranów do płaszczyzn podstaw są równe iedne względem drugich: a że także równe są pochyłości, tych podstaw

do płaszczyzn ścian tych, odpowiadających sobie w Bryłach, które ściany spólną krawędź mają z podstawami tych Ostrogranów; więc i ściany odpowiadające sobie w tych dwóch Ostrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadających sobie w dwóch Bryłach, a które mają spólną krawędź z pierwszemi dwiema ścianami: to jest, z podstawami dwóch tych Ostrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadających sobie w tych dwóch pierwszych Ostrogranach, spuścimy od ich wierzchołków prostopadłe do podstaw tychże dwóch ścian: a od spodków tych prostopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadających sobie w dwóch Bryłach, infze dwie prostopadłe do tychże dwóch podstaw, ścian Ostrogranów. Oprócz tego, na płaszczyznach przechodzących przez dwie w obu dwóch bryłach ciągnięte prostopadłe, spuścimy do drugich dwóch prostopadłych znajdujących się na płaszczyznach ścian odpowiadających sobie, w Bryłach, od tychże co i pierwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe (Obacz Rozdz. I. §. 9. na karcie 20. i następ: Tábl. I. Fig. 3.) te ostatnie prostopadłe, będą prostopadłemi do płaszczyzn dwóch tych ścian odpowiadających sobie, na których ciągnięte były dwie drugie prostopadłe; Trójkąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w jednej, iak i w drugiej

gięty bryle, będą równokątne, a zatem i podobne. A że pierwsi dwie prostopadłe ciągnięte na płaszczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranów, mają się do siebie, jak krawędzie odpowiadające sobie w dwóch bryłach; więc też i odległości wierzchołków, tych dwóch Ostrogranów od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadających, w tych bryłach, będą w tymże samym stosunku: i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadających sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwóch ścianach odpowiadających sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwóch brył krawędziach odpowiadających sobie: a zatem odległości tych spodków od końców odpowiadających sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku: a zatem odległości spodków linii prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian brył, od końców tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwóch ścianach, spodki prostopadłych podobnie są położone. Że zaś i wielkości tych prostopadłych są proporcjonalne krawędziom tych dwóch brył; więc wierzchołki pierwszych dwóch Ostrogranów, są

też

tęż podobnie położone względem dwóch ścian drugich, odpowiadających sobie w Bryłach: a zatem i drugie dwa Ostrograny będą do siebie podobne.

Toż mówić i o inszych Ostrogranach odpowiadających sobie, z których się te dwie bryły składają. (1)

161. *Twierdź: 2.* Powierzchnie brył podobnych, zakończonych samemi tylko płaszczyznowymi powierzchniami, mają się do siebie, iak kwadraty boków ich odpowiadających sobie, czyli są w stosunku dwumnożnym tychże boków.

Dowód: Wszystkie ściany dwóch brył podobnych, po dwie brane są sobie podobne. J tak brane, w jednakowym do siebie są stosunku, to jest w stosunku dwumnożnym, dwóch krawędzi odpowiadających sobie; więc i summa wszystkich ścian kończących jedną bryłę;

(1) To Twierdzenie, jest bardziey długie niż trudne, i łatwo pojąć je można, mając Figurę przed oczyma z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni być Uczniowie, aby w myśli samey umieli sobie wystawić Figurę pomagającą do zrozumienia Twierdzenia podanego; a zdatnieyszą do objaśnienia jego, niżby była Figura odrysowaną w perspektywie, i przed oczyma stawioną.

ię, będzie do summy wszystkich ścian kończących drugą bryłę, w tymże samym stółunku.

162. *Twierd. 3.* Bryłowości dwóch brył podobnych, są do siebie w stółunku sześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadających sobie, czyli, są w stółunku tróymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy już, że stółunek jednego sześcianu do drugiego, ten sam jest, co i stółunek boku pierwszego sześcianu, do czwartej linii ciągnęto proporcjonalnej; którą się znayduie, szukając naprzód trzeciej, ciągnęto proporcjonalnej do boku sześcianu pierwszego, i do boku sześcianu drugiego, a potem do tychże dwóch boków, i do trzeciej proporcjonalnej znalezionej, szukając czwartej.

Gdyby tedy bok drugiego sześcianu był dwa razy n.p. większy od boku sześcianu pierwszego; ta czwarta ciągnęto proporcjonalna, byłaby ośm razy większą od boku sześcianu pierwszego, a zatem i sześcian drugi byłby ośm razy większy od sześcianu pierwszego.

2. Niech będą dwa Równoległoscianny prostokątne podobne.

Gdy

Gdy krawędź jedna, iednego z tych Równoległościanów, jest n.p. dwa razy większą, od krawędzi iednej drugiego Równoległościanu; wszystkie też inże krawędzie pierwszego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podstawy pierwszego Równoległościanu, będzie cztery razy większą, niż powierzchnia podstawy drugiego. A że też i wysokość pierwszego, dwa razy jest większą od wysokości drugiego; więc bryłowatość pierwszego, jest ośm razy większą od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przytóżować można do wszystkich inższych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogólności zaś mówiąc: niech będą trzy krawędzie: A, B, C , iednego Równoległościanu prostokątnego; a zaś: a, b, c , krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwszemu podobnego; będą te trzy stółunki równe; $A : a = B : b = C : c$. Liniióm A , i a , znaydźmy dwie linie L , i M , ciąęło proporcjonalne; tak, aby było $A : a = L : M$.

Będzie pierwszy Równoległościán do drugiego, iak A do M .

Jakoż uwaźaiąc linie A i a , B , i b , iak haki podstaw, tych dwóch Równoległościanów, zamiénmy Prostokąt z linii

ni a , i b , na infty, któryby miał za bok ieden, linią B ; a za bok drugi, tę linią, która wypadnie z proporcji $B: b = a: x$. Że zaś stófunek linii B do b , wzięty jest za równy stófunkowi linii A do a ; więc też będzie $A: a = a: x$; a zatem ta czwarta proporcjonalna, której szukamy, będzie w samej rzeczy trzecią proporcjonalną do A , i a . Nazwiemy tę trzecią proporcjonalną L . Będzie podstawą drugiego Równoległoscianu, równą Prostokątowi z B przez L ; i ten drugi Równoległoscian, będzie równy Równoległoscianowi, któryby miał trzy linie B , c , L , za krawędzie: a zatem stófunek jego do pierwszego Równoległoscianu, będzie ten sam, co i stófunek Prostokąta z linii c , i L , do Prostokąta z linii A , i C .

Zamieścimy Prostokąt z linii c i L , na infty, któryby miał za bok ieden linią C , a za bok drugi linią, która wypadnie z proporcji $C: c = L: x$. Że zaś stófunek linii C do c , wzięty jest za równy stófunkowi A do a , a stófunek A do a , zrobiliśmy równy stófunkowi a do L ; więc też będzie $a: L = L: x$; a zatem ta czwarta proporcjonalna, której szukamy, będzie w samej rzeczy trzecią proporcjonalną do a i L . Nazwiemy tę trzecią proporcjonalną M ; Prostokąty: Cx , M , i $c \times L$, będą równe. A że się dowiodło, iż pierwszy Równole-

lęgościán iest do drugiego w stófunku Prostokąta $A \times C$ do Prostokąta $c \times L$; więc téż ten pierwszy Równoległościán będzie do drugiego w stófunku Prostokąta $A \times G$ do Prostokąta $C \times M$; to iest w stófunku A do M .

Ze zaś iest $A : a = a : L = L : M$; więc stófunek pierwszego Równoległościánu do drugiego, równá się stófunkowi linii pierwszégó do czwártégó, ciągnó proporcjonalnéy; która to pierwsza linia służącá za pierwszy wyráz proporcyi, powinna byđ krawędziem iednégo z tych Równoległościánów, drugim zaś téż proporcyi wyrázem, má byđ krawędź drugiego Równoległościánu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest n.p. krawędź A , i a .

Ale że téż i dwa sześciany maiące krawędzie A , i a , w tymże samym byłby stófunku; więc dwa Równoległościány podobné, maią się do siebie w stófunku sześciánnym ich krawędzi.

163. *Twierdź: przybrane. Wyfokósci Graniałstópów podobnych; lub Osirogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące fobie.*

Dowodz: Dwóch ścián, odpowiadaiących fobie w dwóch Graniałstó-

słupach podobnych, pochyłości do podstaw są równe; tychże ścian wysokości, tak się mają do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokości tych Graniałstópów, równe są prostopadłym spuszczoneym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych; n. p. od punktów na bokach odpowiadających sobie w tychże podstawach; a zatem te wysokości Graniałstópów, będą służyć za jedno ramię kąta prostego, w dwóch Trójkątach podobnych, które za przeciwprostokątne, mają wysokości dwóch ścian odpowiadających sobie. Będą zatem te wysokości dwóch Graniałstópów, tak się mieć do siebie, iak wysokości dwóch ich ścian odpowiadających sobie, to jest: iak krawędzie dwóch tychże Graniałstópów, odpowiadające sobie. To samo rozumowanie przytósować można i do Ostrogranów.

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniałstopy podobne, i te także są do siebie w stosunku sześciennym, ich krawędzi odpowiadających sobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, któreby mogło służyć za wstęp do ogólnego dowodzenia, to samo jest, co i poprzedzające.

Wyśta-

Wystawiając sobie podstawy tych dwóch Graniaściosłupów, zamiénione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podstaw, mają się do siebie, jak kwadraty boków ich, odpowiadających sobie; więc też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom, mieć się do siebie będą, jak kwadraty boków odpowiadających sobie, w tychże podstawach: a zatem i stosunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadających sobie w podstawach, dwóch Graniaściosłupów. A że ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniaściosłupów; więc Równoległosciany mające za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniaściosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniaściosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatem te dwa Równoległosciany, takby się do siebie miały, jak Sześciiany ich krawędzi, albo jak Sześciiany krawędzi odpowiadających sobie w Graniaściosłupach. Że zaś te Równoległosciany, byłyby równe względem Graniaściosłupów; więc też i dwa Graniaściosłupy podobne, mają się do siebie, jak Sześciiany krawędzi ich, odpowiadających sobie.

4. Niech będą dwa iakiékolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadających sobie. Dwa

O Bryłach podobnych. 205

Dwa Graniastołupy n. p. proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów, t. e. mówię, Graniastołupy miałyby wysokości proporcjonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne: a zatem takby się do siebie miały; iak Sześciiany ich krawędzi. A że byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów; więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskimi, mają się do siebie iak Sześciiany, ich krawędzi odpowiadające sobie.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczególności należący do iednej Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iedne względem drugich pojedynczobrane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadających sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa druga Bryła, w tymże samym stosunku, to jest w stosunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadających sobie.

164. *Defin:* Walce proste, podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatem tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a stąd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce,

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych: oprócz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw, przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącej przez ich osi prostopadłe do podstawy, powinny byż do siebie podobne; a zatem iednakowo nachylone do płaszczyzn podstaw, toiest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw:

165. *Twierdż:* 4. Powierzchnie całej Walców prostych podobnych, mają się do siebie, iak kwadraty ich Wymiarów (*Dimensio*) odpowiadających sobie; toiest: iak kwadraty promieni ich podstaw, albo iak ich wysokości.

Powierzchnia całej każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podstawy jego, i z summy wysokości jego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. A że Promienie podstaw, są do siebie (dla podobień-

bienstwa Walców) iak ich wysokości; więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stósunku, w którym są te promienie. Prostopadły więc, w których stósunku mają się do siebie powierzchnie té Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadających sobie, n p. iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie całe Walców w tymże samym stósunku; toiest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o samych powierzchniach krzywych w Walcach; wyłączając z nich podstawy.

166. Twierdz. 5. Bryłowości Walców podobnych, tak się mają do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadających sobie; albo są do siebie w stósunku tróymnożnym tychże wymiarów, n p. w stósunku tróymnożnym promieni, ich podstaw.

Dowód: Opiszmy na podstawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne; podobne: niech té Wielokąty będą podstawami Graniałostupów, téż z Walcami wysokości. Té Graniałostupy będą podobne, a zatem będą się miały do siebie w stósunku tróymnożnym, n p. promieni ich podstaw.

Wal.

Walcę tak się do siebie mają, jak Graniastopuły na nich opisane. Jakoż każdy Walec jest do Graniastopuły na nim opisanego, w stosunku podstawy tego Walca do podstawy Graniastopuły. A że podobne są dwa Wielokąty na podstawach Walców opisane; więc tenże sam stosunek będzie każdego Walca do Graniastopuły na nim opisanego; a zatem tak się mieć będzie ieden Walec, do Graniastopuły na nim opisanego, iak i Walec drugi do Graniastopuły na nim także opisanego: tak więc pierwszy Walec będzie się miał do drugiego, iak i pierwszy Graniastopuły do drugiego.

A że stosunek tych Graniastopułów równa się stosunkowi tróymnożnému promieni podstaw Walców, na których są te Graniastopuły opisane; więc i stosunek tych Walców równać się także będzie stosunkowi tróymnożnému promieni tychże podstaw.

167. Można objaśnić przykładami koniecznemi to Twierdzenie: ma zaś bydź naprzód przystosowane do samych Walców prostych, iakd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten sam stosunek ma mieysce; ponieważ Walce ukośne, równé podstawy i wysokości z Walcami prostémi, byłyby im równé, a zatem byłyby też do siebie w stosunku tróymnożnym promieni podstaw swoich.

168. *Defin.* Ostrokregi proste nazywają się podobnemi, gdy tak się mają do siebie ich wysokości, iak i promienie ich podstaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Ostrokregów są podobne: a zatem podobne są Trójkąty, tworzące obrotém swoim té Ostrokregi.

Co zaś do Ostrokregów ukośnych: tych nie tylko wysokości tak się mieć do siebie powinny, iak promienie ich podstaw; ale nadto i oś ich w tymże samym do siebie są stósunku, a zatem iednakowo bydź nachylone powinny do płaszczyzn podstaw.

169. *Twierdz: 6.* Powierzchnie całej Ostrokregów prostych, są do siebie w stósunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stósunku dwumnożnym boków tychże Ostrokregów.

Dowodzenie tego, może bydź podobné do dowodzenia Twierdzenia 4.

Może téż bydź i w sposób następujący, który także służyłby mógł równie i do Walców.

W jednym którymkolwiek Ostrokregu prostym, powierzchnia krzywá, tak się má do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokregu prostego, do promienia téy podstawy. A że i w drugim Ostrokregu podobnym pierwszemu, téż sam

O

stó-

stósunek má miejsce; więc powierzchnią krzywą iednego Ostrokregu, tak się má do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnią krzywą drugiego Ostrokregu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywéy i z powierzchni podstawy iednego Ostrokregu, toiest cała iego powierzchnią tak się má do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnią drugiego Ostrokregu, do powierzchni iego podstawy: a zatem cała powierzchnią pierwszego Ostrokregu, tak się má do całej powierzchni drugiego, iak powierzchnią podstawy pierwszego Ostrokregu, do powierzchni podstawy drugiego: albo iak kwadrat promienia pierwszego podstawy, do kwadratu promienia drugiego.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywé Ostrokregów prostych podobnych, są w stósunku dwumnożnym promieni podstaw, lub boków albo innych wymiarów odpowiadających sobie.

170. Twierdź 7. Bryłowości Ostrokregów podobnych, mają się do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadających sobie, toiest: iak Sześciany promieni ich podstaw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twier.

O Bryłach podobnych. 211

Twierdzenie to podobnie się dowodzi, iak i poprzedzające względem bryłowatości Walców; kładąc zamiast Graniastostupów na Walcach opisanych, Ostrogranów opisane na Ostrokregach.

171. Uwaga. Wszytko to, cokolwiek się powiedziało o stósunku bryłowatości Równoległoscianów, Graniastostupów, Ostrogranów, i Ostrokregów podobnych, na to wypada, że:

W ogólności mówiąc, te Bryły są w stósunku złożonym z stósunku ich podstaw, i z stósunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te Bryły są podobne, stósunek ich podstaw, jest dwumnożnym stósunku ich wysokości; więc stósunek złożony z stósunku ich podstaw, i z stósunku ich wysokości, składa się z stósunku dwumnożnego, i z stósunku pojedynczego ich wysokości: będzie tedy taki stósunek trójmnożnym stósunku ich wysokości. A że stósunek ich wysokości równa się stósunkowi ich boków, którychkolwiek odpowiadających sobie; więc stósunek tych Brył, gdy do siebie są podobne, jest też stósunkiem trójmnożnym boków ich, którychkolwiek odpowiadających sobie.

172. Twierdź: 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stósunku dwumnożnym

O₂ ich

ich promieni, albo iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stółunku tróymnożnym ich promieni, albo iak sześciany tychże promieni.

Dowódz: Powierzchnie kul, są czterzy razy większe; niżeli powierzchnie ich kół wielkich: a zatém, tak się do siebie mają, iak powierzchnie tychże kół, toieft: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, są $\frac{2}{3}$ Walców na nich opifanych; więc tak się mają do siebie, iak bryłowatości tych Walców, toieft, iak sześciany ich promieni.

173. Uwaga. Widzieliśmy w szczególności, iż powierzchnią kuli, ieft do powierzchni kwadratu iey średnicy, w stółunku okręgu koła do iego średnicy, i tén stółunek ieft zawsze iednakowy. Ieft też, bryłowatość kuli, do bryłowatości sześcianu iey średnicy, iak okrag koła do średnicy iego, 6 razy wziętęy; który także stółunek nigdy się nie odmiénia.

Kule więc zachowują własności Brył podobnych, tak w stółunku ich powierzchni, iako i w stółunku ich bryłowatości. Jakoż, są one w famey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iednéy kuli podob-

O Bryłach podobnych. 213

podobnie jest położony, iak i środek inżey iakieykolwiek kuli: tak iedna iak i druga, tworzy się obrotém półkola, a te półkola są do siebie podobné.

Możnáby więc (z niewielką odmianną) to im przytósować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskimi, względem punktów podobnie położonych w tychże bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobné kul, są té, których kąty w środku, są równe, albo które obrotém podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobné, są té, których promienie podstaw, tak się do siebie mają, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są té, które się tworzą podobnych półodcinków kół obrotém.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliste, i powierzchnie całé, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowódz: Niech będą: ACB , acb , dwa wycinki kół podobné, które obrotém swoim, około promieni: AC , ac , tworzą podobné kul wycinki.

Na-

Táb. VI.
Fig. 4.

Naprzód. Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki: AB : ab , równać się będą powierzchniom kół mających za promienie, linie: AB , ab ; więc tak się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych linii: AB , ab , albo iak kwadraty promieni: AC , ac .

Ponownie. Powierzchnie Ostrokątowe utworzone obrotém promieni: CB , bc , mają się też do siebie, iak kwadraty promieni: CB , cb , albo CA , ca ; więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak się do siebie mają, iak kwadraty promieni CA , ca .

Koła wykreślone promieniami BD , bd , i służące za podstawy odcinków kul, utworzonym przez obrót półodcinków kół; ABD , abd , są także do siebie, iak kwadraty linii BD , bd ; a zatem iak kwadraty promieni: CB , cb , albo CA , ca .

176. **Twierdź.** 10. Bryłowości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, są do siebie w stosunku trójmnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodź. **Naprzód:** Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB , koła, tak się ma do swojej kuli, iak kwadrat linii AB , do kwadratu średnicy AE , albo iak kwadrat linii ab , do kwadratu śred-

średnicy ae ; to jest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb , koła, do kuli swoięy. Więc tenże sām iest stółunek iednego z tych wycinka do swoięy kuli, co i drugiego wycinka do swoięy także kuli: a zatęm te wycinki, tak się do siebie mają, iak i kule, do których należą. A że stółunek tych kul, iest stółunkiem tróymnożnym ich promięni, więc i stółunek tych wycinków iest także stółunkiem tróymnożnym tychże promięni.

Powtóre. Ostrokregi podobné utworzone obrotem Tróykątów, CBD , cbd , są do siebie w stółunku tróymnożnym promięni CB , cb ; więc tak téż mają się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinków ACB , acb , do kół należących; a zatęm i różnice każdego wycinka kuli, od każdego Ostrokregu, to jest odcinki kul, utworzone przez pół-odcinki kół, ABD , abd , są do siebie w stółunku równym stółunkowi wycinków kul, to jest w stółunku tróymnożnym promięni CB , cb .

177. *Twierdz: 11.* Gdy cztery iakie linie czynią proporcją, i gdy dwa pierwsze wyrazy téy proporcyi, są liniami odpowiadającemi sobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych: a dwa ostatnie wyrazy téż proporcyi, są liniami odpowiadającemi sobie,

sobie, w dwóch innych Bryłach podobnych; stółunek dwóch pierwszych Brył, będzie równy stółunkowi dwóch Brył drugich.

Dowódz: Gdyby te cztery linie były bokami czterech sześciątów, te cztery Sześciąty czyniłyby proporcją: a że stółunek dwóch pierwszych Brył, równa się stółunkowi dwóch pierwszych Sześciątów, a stółunek dwóch drugich Brył, równa się stółunkowi dwóch drugich Sześciątów; więc i stółunek dwóch pierwszych Brył, równa się stółunkowi dwóch Brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzcy rosną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą linie odpowiadające sobie w dwóch Bryłach podobnych, dwa razy większe jedné względem drugich; powierzchnia jedné z tych Brył, będzie cztery razy większą od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość jednéy Bryły, będzie ośm razy większą od bryłowatości, drugiey Bryły.

Táb. VI. W ogólności zaś mówiąc, niech będą
Fig. 5. AB, AC, liniami odpowiadającemi sobie,
w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy
Trójkąt prostokątny mający linią AB,
za

O Brytach podobnych. 217

za jedno ramię kąta prostego, a linią AC, za przeciwprostokątną.

Pociągniemy CD prostopadłą do AC, i natrafiającą na linię AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiającą na linię AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył podobnych któreby miały AB, i AC za linie odpowiadające sobie, mają się tak do siebie, jak linie AB, i AD: a bryłowości ich są w tym samym stosunku, w którym linie AB, i AE:

A że linią AE, większą jest względem linii AB, niżeli linią AD; więc też i bryłowość drugiey Bryły, większą jest względem bryłowości pierwszey Bryły, niżeli powierzchnia téy drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to jest: bryłowość drugiey Bryły prędszy się powiększa, niżeli iéy powierzchnia.

179. Uwaga. Na poprzedzających Twierdzeniach zasądza się podział Linił Brył (Linea Solidorum) który znaydujemy na cyrku proporcjonalnym.

Ta linia zawiera w sobie zwyczajnie 64 podziałów, które się rachować zaczyna.

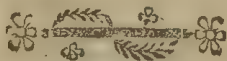
zaczynają od środka narzędzia (a centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1, 8, 27, 64, tak się mają do siebie, iak

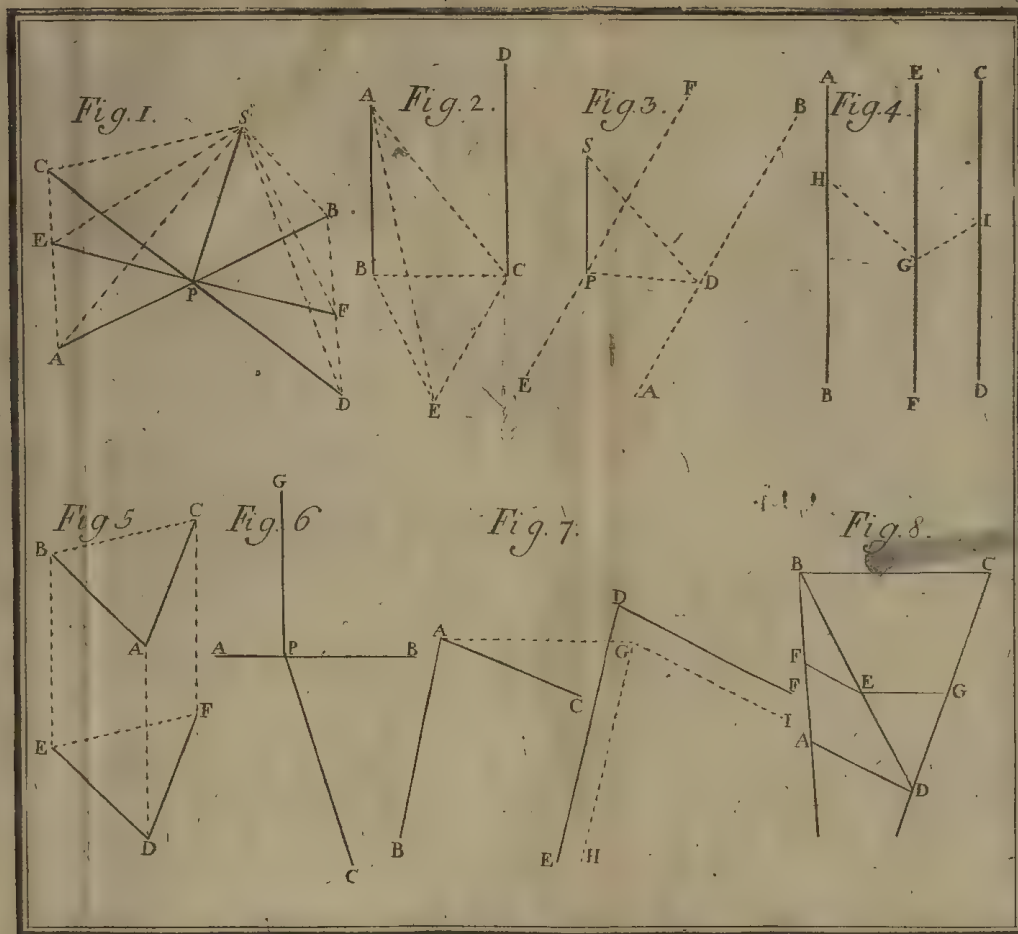
liczby 1, 2, 3, 4; co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, mają bryłowości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Insze podziały wyznaczone są przez wyciągnięcie przybliżone pierwiastków sześciennych. J tak, ponieważ boki dwóch Sześcianów, z których jeden dwa razy jest więkzzy od drugiego, tak się blisko mają do siebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na téj linii liczbami: 1, 2, tak się mają do siebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwóch takich linii, znajdujących się na dwóch ramionach cyrkla proporcjonalnego, podobne jest używaniu infzych linii tamże się znajdujących, które w osobnym na to Rozdziele już się wyłożyło, w Części I.

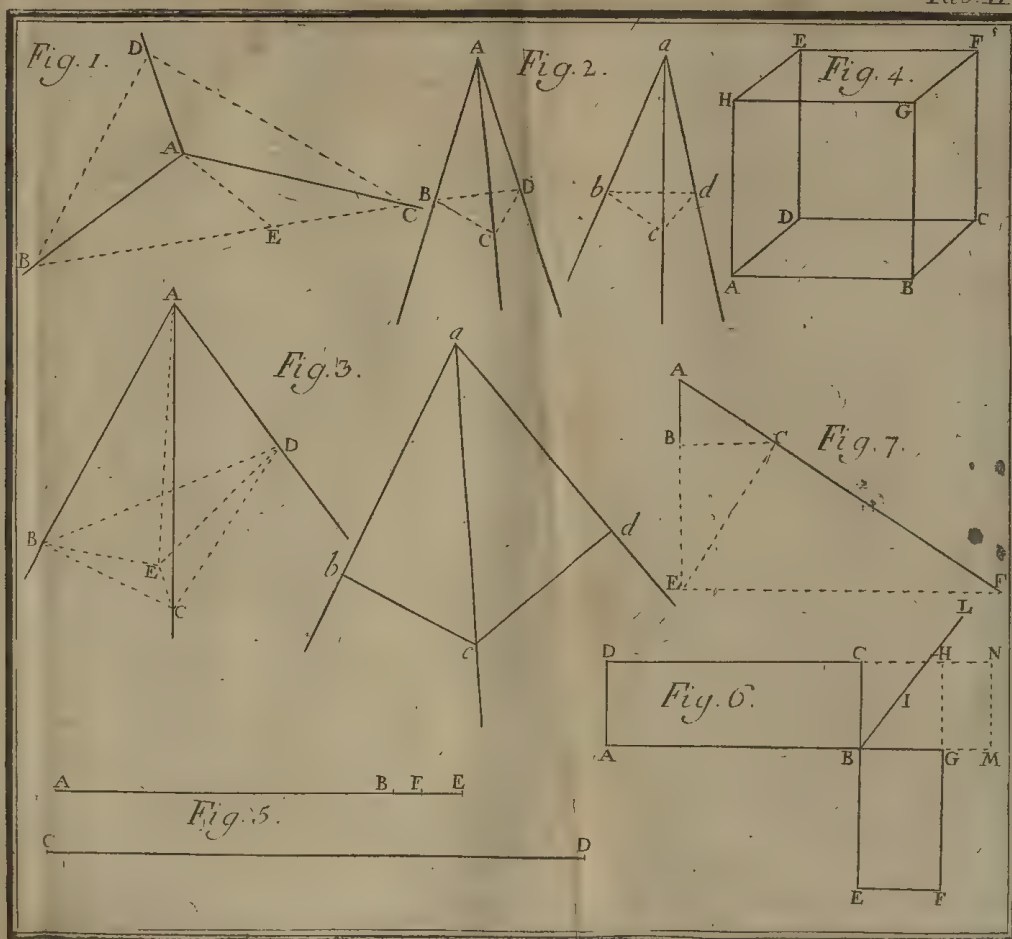
K O N I E C.



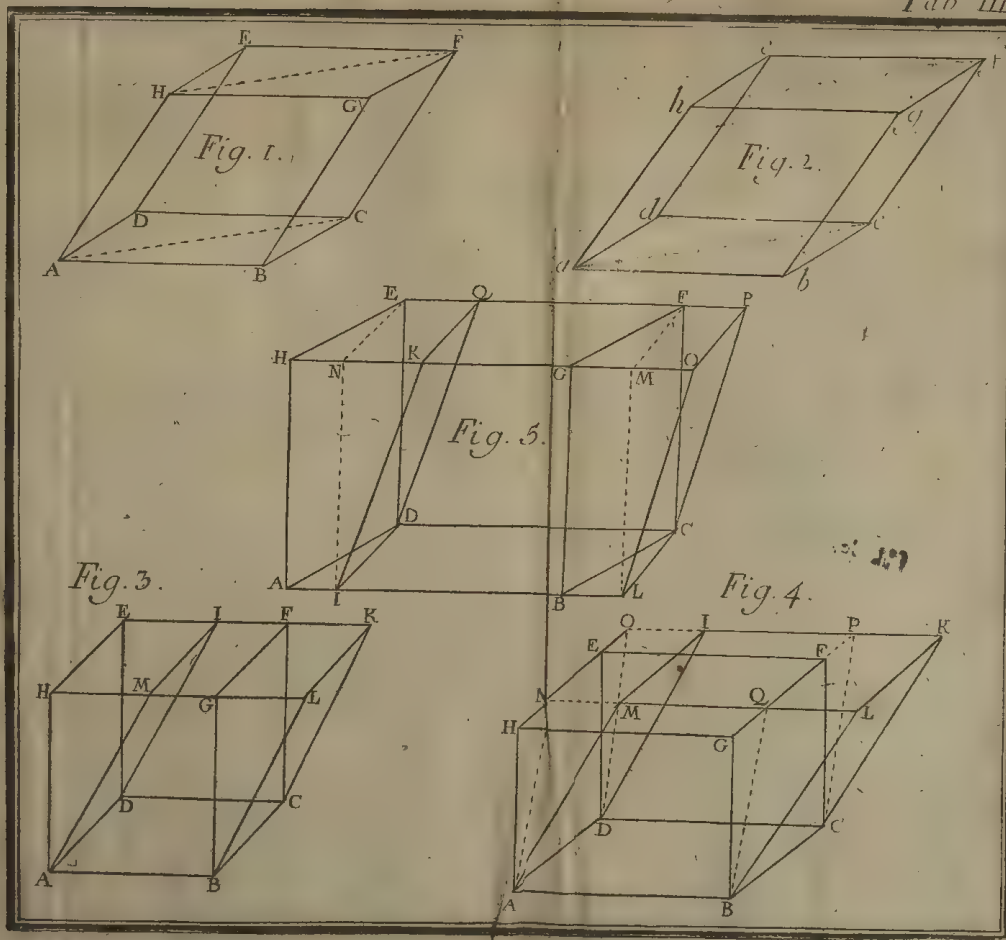
BIBLIOTHECA
UNIV. X FACELL.
CRACOVENSIS



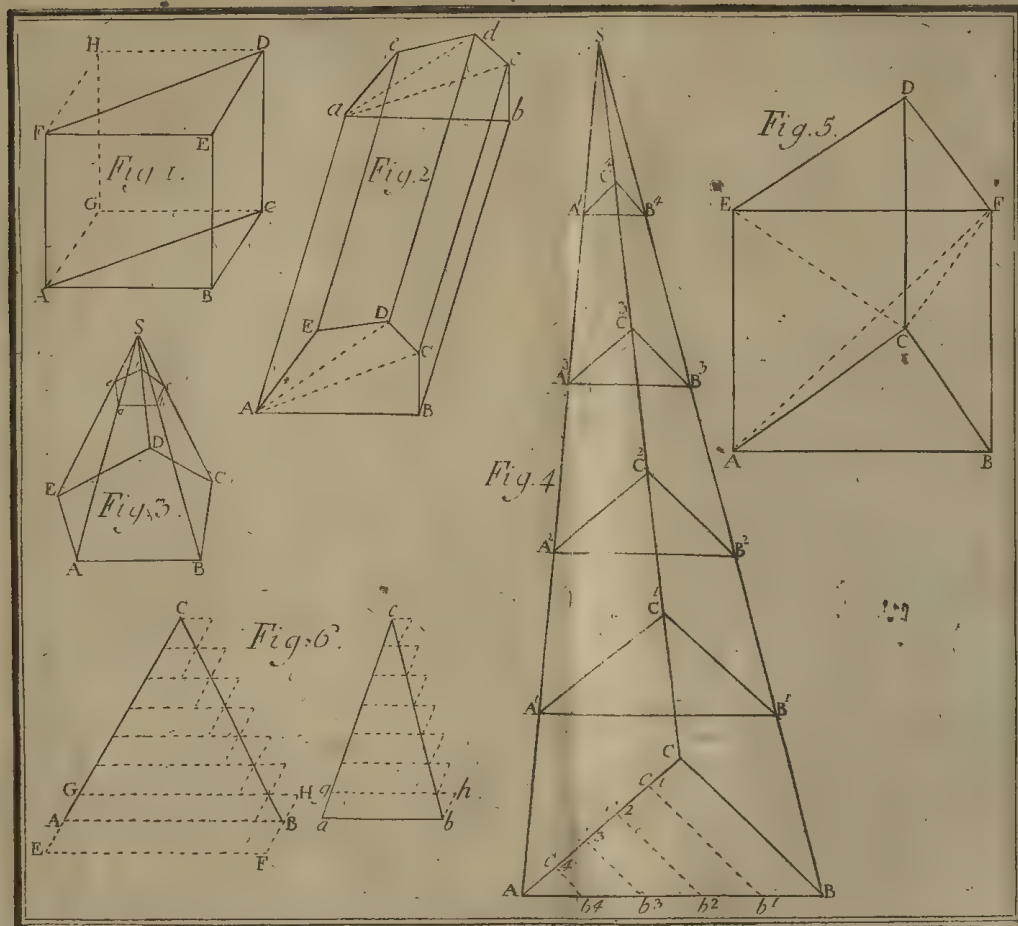
Sim. J. J.



Bat. seq.



1001 1002



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

pp. 129

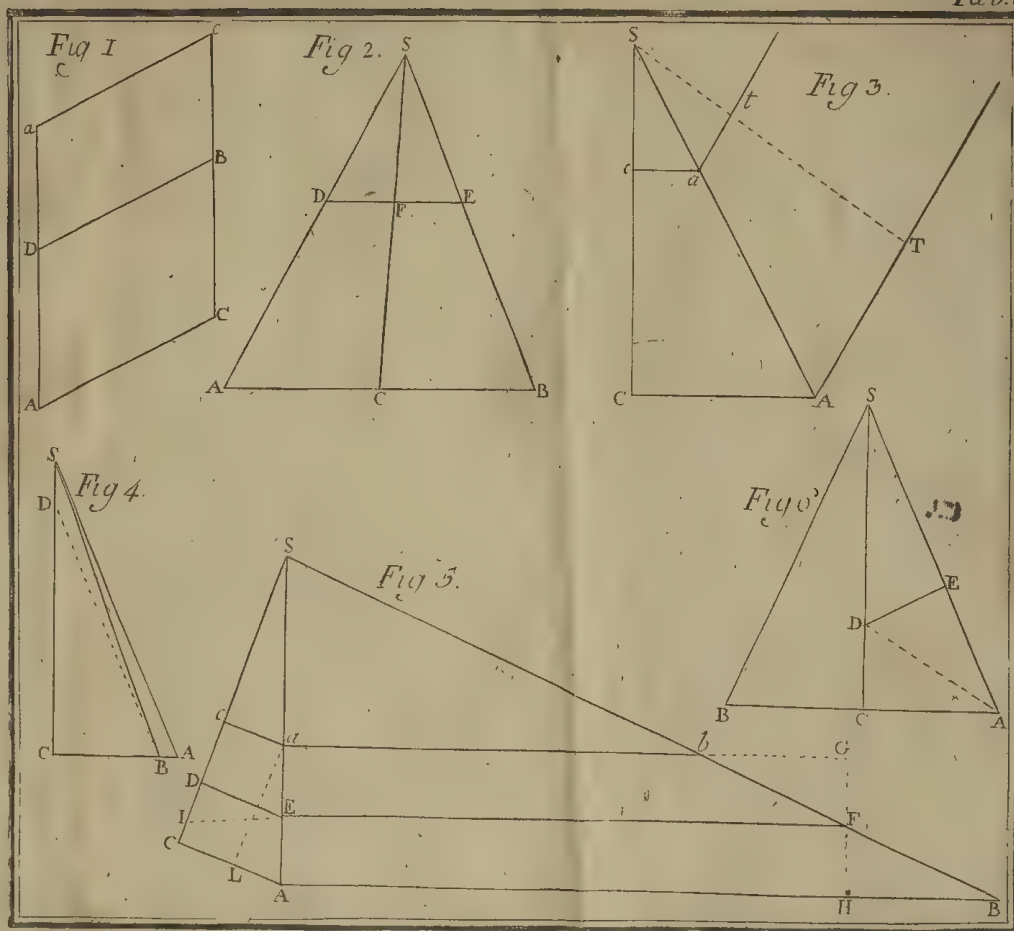
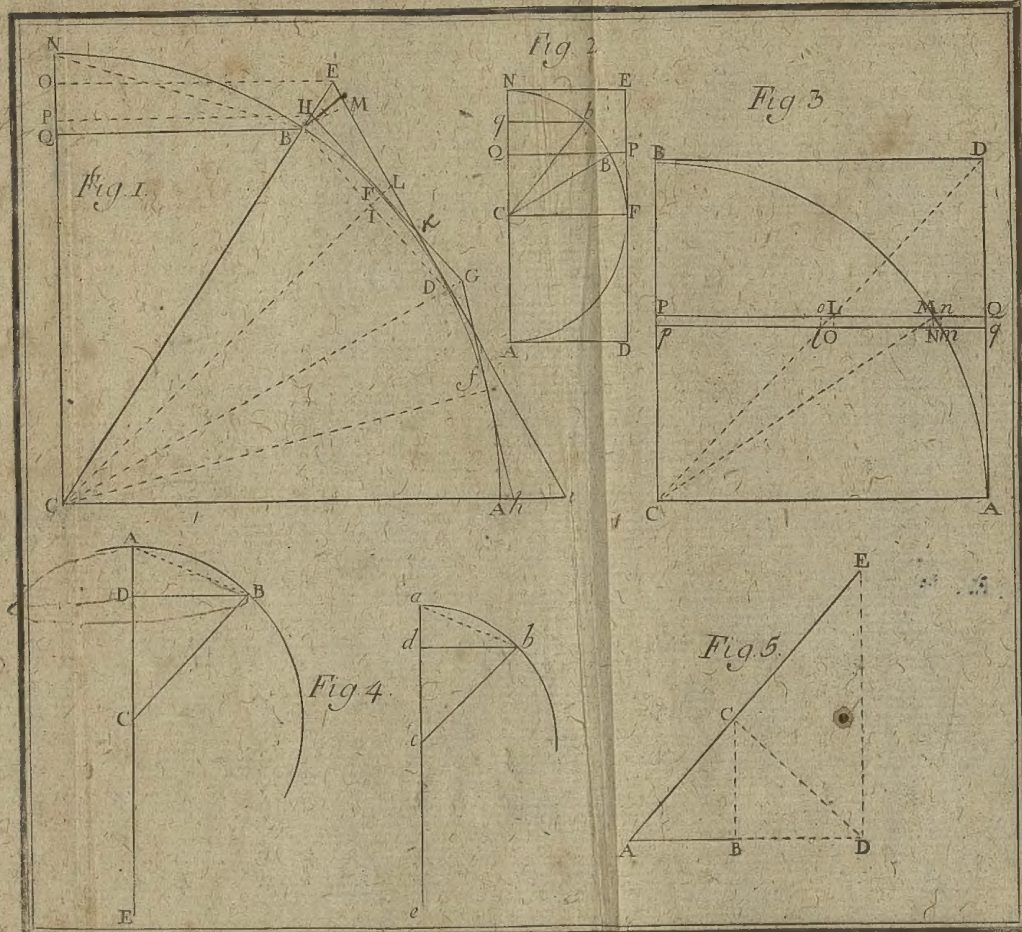


Fig 5. Mountain

101



Bib. Jag.

BIBLIOTHECA
UNIVERSITATIS
CRACOVENSIS

58 6143
BIBLET
Bib. Jag.

ita & bona munuscula Nobilibus Livoniae bene meritis ac etiam vi-
rioris conditionis hominibus, emeritis tamen gentis Polonae vel lithua-

lra & bona immittit. Nobiliores Lituanie bene meritis
rioris conditionis hominibus, emeritis tamen gentis Polonae vel Lithua-
nae, aut Ducatus Livoniae in usumfructum advitalem, conferri jubentur.
prout & conferuntur; quæ Bona alio nomine vocantur, *Pauis bene-*
quare IOANNES ALBERTVS Petricov. A. 1496. confir-
a CASIMIRI III. non immerito inquit: Favtor & beni-
is in suos offensa subiectos, sic commodari exhiberiq; conspici-
neccessitas, honestas ac eventuum communium ius creditur
in futurum exposcere. Herbert. v. Thronus Regius. Quid
munificum & liberalem esse, quam imitari DEVM? ut
in ille erga nos liberalis est, ita nos quoq; erga alios
, ubi supra pag. 62.

ualitas, ut sit VNVS: Cum sub uno Principe & capite ea-
a diversa habere non debeat, ne sit tanquam monstrum
diversa habens capita. Expediit enim Reipublica, ut uno & aequali jure
tam Cracovienses, quam etiam Majoris Polonae inhabitatores & cæ-
teræ Regni nostri Terræ utantur & judicentur. *Casimirus Vislic. A. 1368.*

quem—

Biblioteka Jagiellońska



stdr0020623

